

Theoretische Informatik 2

Übungsblatt 6

René Maseli
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Sommersemester 2024

Ausgabe: 24.06.2024

Abgabe: 04.07.2024, 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, den 04.07.2024 um 23:59 Uhr, ab. Laden Sie sie dazu als PDF oder Scan im Vips im Stud.IP hoch. Geben Sie als 4er-Gruppe ab.

Hausaufgabe 1: P-Vollständigkeit [7 Punkte]

Betrachten Sie das folgende elementare Problem für kontextfreie Sprachen.

Leerheit kontextfreier Sprachen (ECFL)

Gegeben: Eine Typ-2-Grammatik $G = \langle N, \Sigma, S, P \rangle$.

Frage: $\mathcal{L}(G) = \emptyset$?

- [3 Punkte] Geben Sie einen deterministischen Algorithmus an, der ECFL mit nicht mehr als polynomial viel Zeit entscheidet.
- [4 Punkte] Zeigen Sie, dass ECFL P-schwer bzgl. LogSpace-many-one-Reduktionen ist.

Hausaufgabe 2: NP und Graph-Probleme [6 Punkte]

Untersuchen Sie die folgenden Probleme bezüglich ihrer Beziehung zur Klasse NP.

Vertex Covering (VC)

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ und $k \in \mathbb{N}$.

Frage: Gibt es eine Menge $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall vEw : v \in S \vee w \in S$?

- [2 Punkte] Zeigen Sie, dass $VC \in NP$ gilt, indem Sie einen passenden nichtdeterministischen Entscheider entwerfen, dessen Laufzeit nach oben durch ein Polynom beschränkt ist.
- [4 Punkte] Zeigen Sie, dass $SAT \leq_m^{\log} VC$ gilt, indem Sie eine passende Reduktion angeben.
Hinweis: Mit k und passend gewählten Kanten können Sie erzwingen, dass jedes Vertex-Covering jeweils genau eines aus k Knotenpaaren enthalten muss.

Hausaufgabe 3: PSPACE und reguläre Sprachen [7 Punkte]

Zeigen Sie Korollar 12.10 aus dem Skript:

- [2 Punkte] Sei $A = \langle Q, \rightarrow, q_0, Q_F \rangle$ ein NFA mit $\Sigma^{\leq 2^{|Q|}} \subseteq \mathcal{L}(A)$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{L}(A) = \Sigma^*$ gilt.
- [5 Punkte] Beweisen Sie, dass INCLUSION und EQUIVALENCE PSPACE-vollständig bzgl. LogSpace-many-one-Reduktionen sind.

Übungsaufgabe 4:

Zeigen Sie, dass P unter Vereinigung, Konkatenation, Komplement und Kleene-Stern abgeschlossen ist:

Übungsaufgabe 5:

Beweisen Sie, dass VALIDITY coNP-vollständig bzgl. \leq_m^{\log} ist.

VALIDITY

Gegeben: Aussagenlogische Formel φ in CNF.

Frage: Ist φ allgemeingültig, also eine Tautologie?

Übungsaufgabe 6:

Beweisen Sie, dass ENT coNP-vollständig bezüglich Logspace-Reduktionen ist.

ENTAILMENT (ENT)

Gegeben: Aussagenlogische Formeln F, F' in konjunktiver Normalform.

Frage: Impliziert die Formel F die Formel F' ?

Übungsaufgabe 7:

Zeigen Sie: Wenn wir SAT in P lösen könnten, dann könnten wir auch für jede Formel F in CNF eine erfüllende Belegung in P berechnen. Geben Sie dazu einen Algorithmus an.

Übungsaufgabe 8:

Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M ist in n^2 viele $(n \times n)$ -Blöcke unterteilt. M ist korrekt ausgefüllt, wenn in jedem Block, in jeder Zeile und in jeder Spalte alle Zahlen von 1 bis n^2 genau einmal vorkommen. Es ist leicht zu sehen, dass SUDOKU in NP liegt, denn wir können die fehlenden Einträge raten und effizient überprüfen. Das heißt auch, dass es eine polytime-Reduktion von SUDOKU auf SAT geben muss.

Finden Sie nun solch eine Reduktion von SUDOKU auf SAT.

Bemerkung: Man kann sogar zeigen, dass SUDOKU NP-vollständig ist.

SUDOKU

Gegeben: Eine $n^2 \times n^2$ Sudoku-Matrix M mit Einträgen in $\{1, \dots, n^2, ?\}$

Frage: Gibt es eine Möglichkeit die ?-Einträge so zu ersetzen, dass ein korrekt ausgefülltes Sudoku herauskommt?

Übungsaufgabe 9:

Zeigen Sie, dass CLIQUE NP-vollständig bezüglich logspace-many-one-Reduktionen ist.

CLIQUE

Gegeben: Ein ungerichteter Graph $G = \langle V, E \rangle$ und eine Zahl $k \in \mathbb{N}$

Frage: Gibt es $S \subseteq V$ mit $|S| = k$ und $\forall u, v \in S: \langle u, v \rangle \in E$?