René Maseli
Thomas Haas

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 4

TU Braunschweig
Wintersemester 2023/24

Ausgabe: 2023-12-08 Abgabe: 2023-12-21 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 21.12.2023 23:59 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab und geben Sie **alle** Gruppenmitglieder mit **Matrikelnummer, Namen und Studiengang** an.

Definition: Endlicher Transduktor

Ein endlicher Transduktor über einem endlichen Eingabe-Alphabet Σ und einem endlichen Ausgabe-Alphabet Γ ist formal ein 4-Tupel $T = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_F \rangle$ bestehend aus

1. einer endlicher Menge an Zuständen Q,
2. einen initialen Zustand $q_0 \in Q$,
3. eine Transitionsrelation $\rightarrow \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times (\Gamma \cup \{\varepsilon\}) \times Q$,
4. und eine Menge akzeptierender Zustände $Q_F \subseteq Q$.

Im Folgenden werden weitere Notationen und wichtige Definitionen aufgelistet:

1. $\langle p, a, x, q \rangle \in \rightarrow$ wird durch $p \xrightarrow{a/x} q$ ausgedrückt. Wenn im Zustant p ein a gelesen wird, gibt der Transduktor ein x aus und wechselt in Zustand q. Intuitiv werden den Transitionen mit $a = \varepsilon$ gefolgt, ohne ein Eingabesymbol zu konsumieren, und die Transitionen mit $x = \varepsilon$ erzeugen keine Ausgabe.
2. Eine Berechnung $q_0 \xrightarrow{w_1/o_1} q_1 \xrightarrow{w_2/o_2} \cdots \xrightarrow{w_{n-1}/o_{n-1}} q_{n-1} \xrightarrow{w_n/o_n} q_n$ können wir auch schreiben als $q_0 \xrightarrow{w/o} q_n$, wobei $w \in \Sigma^*$ und $o \in \Gamma^*$ die jeweiligen Konkatenationen ohne ε darstellen.
3. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei die Übersetzung unter T definiert als
$T(L) = \{\, o \in \Gamma^* \mid \exists w \in L, q_f \in Q_F : q_0 \xrightarrow{w/o} q_f \,\}$.

Hausaufgabe 1: Endliche Transduktoren [5 Punkte]

Man kann sich einen Transduktor als einen NFA mit spontanen Transitionen vorstellen, welcher nicht nur Eingabewörter akzeptiert, sondern dabei auch Wörter in einer Ausgabe hinterlässt. Es übersetzt die Eingaben aus Σ^* in Ausgaben aus Γ^*. Das macht Transduktoren zu geeigneten Werkzeugen in der Linguistik und im Verarbeiten natürlicher Sprachen.

a) [3 Punkte] Konstruieren Sie einen Transduktor T, der in einem Wort $w \in \{a, b, c\}^*$ ein b vor jedes Vorkommen von a vorhängt und jedes zweite c löscht. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $T((ac)^*)$ an. Ein Korrektheitsbeweis ist nicht nötig.

b) [2 Punkte] Wir nennen einen Transduktor deterministisch, wenn es in jedem Zustand zu jeder Eingabe genau eine mögliche, und damit auch eindeutige, Transition gibt; diese darf auch spontan sein. Beispielsweise darf ein Zustand mit einer a-Transition keine weitere a-Transition oder spontane Transition besitzen. In beiden Fällen würde es 2 mögliche Transitionen geben, die der Transduktor beim Lesen eines a's nehmen könnte.

   Zeigen Sie, dass es **nicht** möglich ist Transduktoren zu determinisieren, d.h. es gibt nicht zu jedem Transduktor T einen deterministischen Transduktor T^{det} mit $T(L) = T^{\text{det}}(L)$ für alle Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$.

Hausaufgabe 2: Abgeschlossenheit unter Transduktoren [12 Punkte]

Zeigen Sie, dass jede Sprachklasse genau dann unter Übersetzungen unter Transduktoren abgeschlossen ist, wenn sie unter Schnitten mit regulären Sprachen, Homomorphismus-Bildern und -Urbildern abgeschlossen ist.

a) [3 Punkte] Sei $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$ ein Homomorphismus zwischen Sprachen. Konstruieren Sie einen Transduktor T_h, sodass $T_h(L) = h(L)$ für jede Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie nun, dass es auch einen Transduktor $T_{h^{-1}}$ gibt, sodass $T_{h^{-1}}(L) = h^{-1}(L)$ für alle $L \subseteq \Gamma^*$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

c) [2 Punkte] Zeigen Sie, dass es zu jeder regulären Sprachen M einen Transduktor T_M gibt mit $T_M(L) = L \cap M$.

d) [4 Punkte] Zeigen Sie nun, dass die Übersetzung unter eines Transduktor T als Kombination der drei oben beschriebenen Operationen dargestellt werden kann.

Hausaufgabe 3: Äquivalenzklassen [9 Punkte]

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet.

a) [5 Punkte] Betrachten Sie $L = \{\, a^n b a^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \geq m \,\}$. Beweisen Sie, dass

$$[a^n]_{\equiv_L} = \{a^n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$
$$[a^n.a.b]_{\equiv_L} = \left\{\, a^{\ell+1}.b^{\ell+1-n} \;\middle|\; \ell \in \mathbb{N}, \ell \geqslant n \,\right\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

   gilt. Mit unendlich vielen Klassen ist L nach dem Satz von Myhill & Nerode nicht regulär. Geben Sie alle weiteren Äquvialenzklassen bezüglich $\equiv_L$ an.

b) [2 Punkte] Betrachten Sie die Sprache $M = \{a, b\}^*.\{aab, abb\}.\{a, b\}^*$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_M$. Geben Sie den Äquvialenzklassenautomaten A_M an.

c) [2 Punkte] Betrachten Sie die Sprache $N = \{a, b\}^*.\{a\}.\{a, b\}^* \cup (\{a, b\}.\{a, b\})^*$. Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_N$. Geben Sie den Äquvialenzklassenautomaten A_N an.

Hausaufgabe 4: Der Isomorphiesatz für DFAs [10 Punkte]

Es seien $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache mit $\text{Index}(\equiv_L) = k \in \mathbb{N}$ und $A\langle Q, q_0, \to, Q_F\rangle$ ein DFA mit $L = \mathcal{L}(A)$ und $|Q| = k$. Es sei $A_L = \langle Q_L, q_{0L}, \to_L, Q_{FL}\rangle$ der Äquivalenzklassenautomat zu L mit $\mathcal{L}(A_L) = L$ und $u_1, \ldots, u_k$ die Repräsentanten für die Äquivalenzklassen von $\equiv_L$.

Im Folgenden sollen Sie Satz 6.11 aus der Vorlesung zeigen: A und A_L sind isomorph. Der Isomorphismus $\beta : Q_L \to Q$ sei dabei wie folgt gewählt: $\beta([u_i]_{\equiv_L}) = q$ mit $q_0 \xrightarrow{u_i} q$ in A.

a) [2 Punkte] Betrachten Sie die Äquivalenzrelation $\equiv_A$. Zeigen Sie, dass $\text{Index}(\equiv_A) = \text{Index}(\equiv_L)$ gilt. Zusammen mit $\equiv_A \subseteq \equiv_L$ aus der Vorlesung wäre damit $\equiv_A = \equiv_L$ gezeigt.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass β wohldefiniert ist.
Hinweis: Die Abbildung β wurde auf Äquivalenzklassen definiert. Man muss zeigen, dass β unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $u_1, \ldots, u_k$ ist. Dazu nimmt man $\hat{u}_i \equiv_L u_i$ an und zeigt, dass $\beta([\hat{u}_i]_{\equiv_L}) = \beta([u_i]_{\equiv_L})$ folgt.

c) [2 Punkte] Beweisen Sie, dass β eine Bijektion zwischen Q_L und Q ist.

d) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass β ein Isomorphismus ist. Man muss noch zeigen, dass $\beta(q_{0L}) = q_0$, $\beta(Q_{FL}) = Q_F$ und für alle $p, p' \in Q_L$ und $a \in \Sigma$ gilt:$p \xrightarrow{a}_L p'$ gdw. $\beta(p) \xrightarrow{a} \beta(p')$.

Übungsaufgabe 5:

In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass sich manche Sprachen mit einem kleinen NFA beschreiben lassen, jeder DFA dafür jedoch zwangsweise riesig ist.

Für eine Zahl $k \in \mathbb{N}, k > 0$ sei $L_{a@k} = \Sigma^*.a.\Sigma^{k-1}$ die Sprache der Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$, deren k-ter Buchstabe von rechts ein a ist.

a) Zeigen Sie, wie man zu jedem $k \in \mathbb{N}, k > 0$ einen NFA $A_k = \langle Q_k, q_0, \to, F_k \rangle$ mit $\mathcal{L}(A_k) = L_{a@k}$ und $|Q_k| = k + 1$ konstruiert. Geben Sie diesen Automaten formal als Tupel an.
Sie müssen die Sprachgleichheit nicht beweisen.

b) Zeichnen Sie A_3 und bestimmen Sie seine Determinisierung A_3^{det} mittels der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.
Vergleichen Sie die Zustandsanzahl von A_3 und A_3^{det}.

c) Sei $k \in \mathbb{N}, k > 0$ beliebig. Beweisen Sie, dass es für $L_{a@k}$ keinen DFA B mit weniger als 2^k Zuständen gibt, so dass $\mathcal{L}(B) = L_{a@k}$ gilt.
Gehen Sie wie folgt vor:

1. Angenommen es gäbe einen endlichen Automaten $B = \langle Q', q_0', \to', Q_F' \rangle$ mit$\mathcal{L}(B) = L_{a@k}$ und$|Q'| < 2^k$.

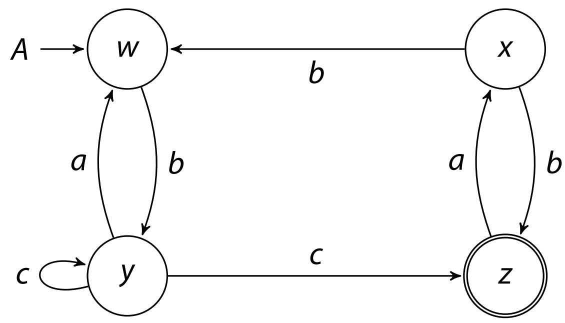
2. Betrachten Sie die Menge Σ^k der Wörter der Länge k. Wie viele solcher Wörter gibt es?

3. Betrachten Sie zu jedem Wort $w \in \Sigma^k$ den (eindeutigen) Zustand q_w, in dem DFA B ist, nachdem er w gelesen hat.

4. Leiten Sie nun einen Widerspruch her.

Übungsaufgabe 6:

Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$:



Betrachten Sie den folgenden Homomorphismus $f\colon \Sigma \to \{0,1\}$. $g(a) = \varepsilon \quad g(b) = 10 \quad g(c) = 01$

a) Konstruieren Sie den Bild-Automaten $g(A)$ mit $\mathcal{L}(g(A)) = g(\mathcal{L}(A))$ als einen gewöhnlichen NFA . Zeigen Sie, dass $1001011010100110 \in \mathcal{L}(g(A))$ gilt, indem Sie einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

Betrachten Sie jetzt den folgenden Homomorphismus $g\colon \{d, e\} \to \Sigma$ mit $g(d) = bcc \quad g(e) = ab$.

b) Konstruieren Sie den Urbild-Automaten $g^{-1}(A)$ mit $\mathcal{L}(g^{-1}(A)) = g^{-1}(\mathcal{L}(A))$ als einen gewöhnlichen NFA .

c) Zeigen Sie, dass $deeded \in \mathcal{L}(g^{-1}(A))$ gilt, indem Sie einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

d) Betrachten Sie den folgenden Homomorphismus $g\colon \{c, d, e\} \to \Sigma$.

$$g(c) = \varepsilon$$
$$g(d) = bbb$$
$$g(e) = ba$$

Construct the co-image-automaton $g^{-1}(A)$ with $\mathcal{L}(g^{-1}(A)) = g^{-1}(\mathcal{L}(A))$.
Zeigen Sie, dass $ceddc \in \mathcal{L}(g^{-1}(A))$ gilt, indem Sie einen entsprechenden Lauf durch A angeben.

Übungsaufgabe 7:

Es sei $\equiv\, \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ eine Äquivalenzrelation auf Wörtern. Wie üblich schreiben wir $u \equiv v$ (statt $\langle u, v\rangle \in\, \equiv$), um auszudrücken, dass u und v gemäß $\equiv$ äquivalent sind.

a) Beweisen Sie formal die folgenden grundlegenden Eigenschaften von Äquivalenzrelationen:

- Jedes Wort ist in seiner Äquivalenzklasse enthalten: $u \in [u]_\equiv$.
- Die Äquivalenzklassen von äquivalenten Wörtern sind gleich: $u \equiv v \implies [u]_\equiv = [v]_\equiv$.
- Die Äquivalenzklassen von nicht-äquivalenten Wörtern sind disjunkt: $u \not\equiv v \implies [u]_\equiv \cap [v]_\equiv = \emptyset$.

b) Es sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $\equiv_L$ die aus der Vorlesung bekannte Nerode-Rechtskongruenz mit

$$u \equiv_L v \quad \text{gdw.} \quad \forall w \in \Sigma^*\colon u.w \in L \text{ gdw. } v.w \in L\,.$$

Beweisen Sie, dass $\equiv_L$ tatsächlich eine Äquivalenzrelation und Rechtskongruenz ist. Letzteres bedeutet, dass für alle u, v mit $u \equiv_L v$ und alle $x \in \Sigma^*$ gilt: $u.x \equiv_L v.x$.

c) Es sei $A = \langle Q, q_0, \rightarrow, Q_F \rangle$ ein DFA. Die Relation $\equiv_A \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist definiert durch:

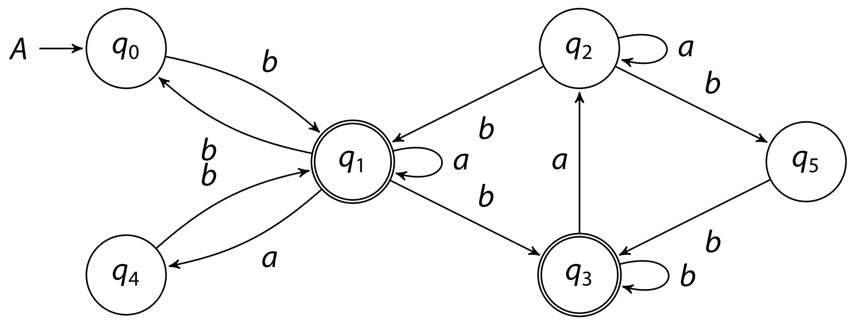
$$u \equiv_A v \quad \text{gdw.} \quad \exists q \in Q\colon q_0 \xrightarrow{u} q \text{ und } q_0 \xrightarrow{v} q.$$

Zeigen Sie, dass $\equiv_A$ eine Äquivalenzrelation ist.

d) Ist $\equiv_A$ aus Aufgabenteil c) auch eine Äquivalenzrelation, wenn A ein NFA ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Übungsaufgabe 8:

Minimalisieren Sie den folgenden Automaten A.



a) Konstruieren Sie den Potenzmengen-Automaten $\mathcal{P}(A)$.

b) Führen Sie den *Table-Filling-Algorithmus* für $\mathcal{P}(A)$ aus. Geben Sie dabei in jeder markierten Zelle der Tabelle den Schritt an, in welchem diese markiert wurde. (Beginnend mit 0 für final-/nicht-final-Zustände.)

c) Geben Sie den minimalen DFA für $\mathcal{L}(A)$ an.