René Maseli
Thomas Haas

Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 3

TU Braunschweig
Wintersemester 2023/24

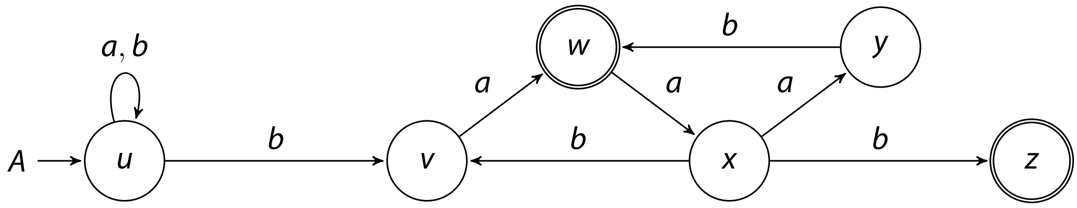
Ausgabe: 2023-11-24 Abgabe: 2023-12-07 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 07.12.2023 23:59 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab und geben Sie **alle** Gruppenmitglieder mit **Matrikelnummer, Namen und Studiengang** an.

Hausaufgabe 1: Reguläre Sprachen und endliche Automaten [11 Punkte]
Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) [5 Punkte] Es gibt für jedes Paar von NFAs A und B (andere) NFA $A \cup B$ und $A.B$, welche $\mathcal{L}(A \cup B) = \mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$ und $\mathcal{L}(A.B) = \mathcal{L}(A).\mathcal{L}(B)$ erfüllen.
Hinweis: Geben Sie dazu jeweils eine Konstruktion an, die unabhängig von A und B funktioniert, und zeigen Sie, dass die entsprechenden Sprachen übereinstimmen.

Betrachten Sie nun den folgenden NFA A über dem Alphabet $\{a, b\}$:



b) [1 Punkt] Geben Sie das zu A gehörige Gleichungssystem an.

c) [3 Punkte] Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A)$, indem Sie das Gleichungssystem unter Verwendung von Ardens Lemma lösen.

d) [2 Punkte] Geben Sie insbesondere einen Ausdruck für jede Variable an.

Hausaufgabe 2: Input sanitization [8 Punkte]
Überprüfen Sie die folgenden Probleme darauf, ob diese sich als Probleme über regulären Sprachen auffassen lassen oder nicht. Begründen Sie ihre Antwort indem Sie einen regulären Ausdruck oder einen Automaten angeben, falls möglich, oder argumentieren, dass die Sprache tatsächlich nicht regulär ist. Korrektheitsbeweise sind nicht gefordert.

Nehmen sie als Alphabet $\Sigma = L \cup U \cup D \cup S \cup W$ an, partitioniert auf Kleinbuchstaben L (lower-case), Großbuchstaben U, Ziffern D, Sonderzeichen S und Leerzeichen W.

a) [1 Punkt] Hat der eingegeben Text mindestens 3 Zeichen und höchstens 18 Zeichen?

b) [1 Punkt] Kommt jede Art von nicht-Leerzeichen (L, U, D und S) mindestens 1 mal vor?

c) [2 Punkte] *Parenthesization:* Hat der eingegebe Text eine korrekte Klammerung, ðjede öffnende Klammer hat eine passende schließende Klammer und umgekehrt. `(ri)(gh)t`, `R(i(g)h)t` sind korrekt, aber `w(r)on)g` und `W(r)o(n(g` nicht.

d) [2 Punkte] *Stringliterale:* Mit $' \in S$ sollen Zeichenfolgen umschlossen und mit $\backslash \in S$ sollen darin Zeichen *escaped* werden können. Hat jedes öffnende `'` ein schließendes `'`, das nicht escaped ist? (z.B. `'no'issue'with'\'\\'` oder `'Robert\');DROP TABLE Students;--'`)

e) [2 Punkte] *Tabellen:* Haben alle Zeilen (getrennt durch Umbrüche `\n`) die gleiche Anzahl an Spalten (jeweils getrennt durch Kommata `,`)?

Hausaufgabe 3: Determinisierung [8 Punkte]

Es sei $A = \langle Q, q_0, \to, Q_F \rangle$ ein NFA über Σ, und $A' = \langle \mathcal{P}(Q), Q_0, \to_B, Q_F' \rangle$ der durch die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion entstehende Automat mit $Q_0 = \{q_0\}$, $X \xrightarrow{a}' \{\, q \in Q \mid \exists p \in X \colon p \xrightarrow{a} q \,\}$ für alle $X \subseteq Q$ und $a \in \Sigma$, und $Q_F' = \{\, X \subseteq Q \mid X \cap Q_F \neq \varnothing \,\}$.

Ziel dieser Aufgabe ist es, Satz 3.18 zu beweisen. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

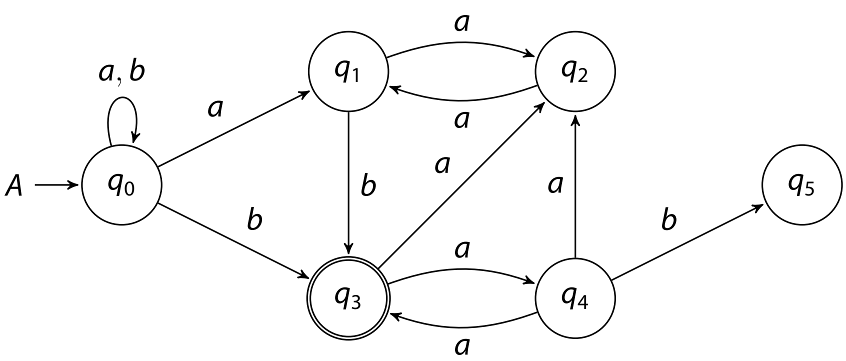
a) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A gilt für den (eindeutigen) Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}' Q_1 \xrightarrow{a_2}' \ldots \xrightarrow{a_i}' Q_i$ von A', der das selbe Wort liest, $q_i \in Q_i$.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie durch Induktion nach i: Zu jedem Lauf $Q_0 \xrightarrow{a_1}' Q_1 \xrightarrow{a_2}' \cdots \xrightarrow{a_i}' Q_i$ von A' und jedem Zustand $q_i \in Q_i$ gibt es einen Lauf $q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} \cdots \xrightarrow{a_i} q_i$ von A, der das selbe Wort liest und in q_i endet.

c) [2 Punkte] Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b), dass $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A')$ gilt.

Hausaufgabe 4: Potenzmengenkonstruktion und Komplementierung [7 Punkte]

Gegeben sei der folgende NFA A über. $\Sigma = \{a, b\}$.



a) [2 Punkte] Determinisieren Sie A, bestimmen Sie also einen DFA B mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.
Hinweis: Sie können sich auf die Zustände beschränken, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind. Konstruieren Sie hierzu zu bereits vorhandenen Zuständen ihre Nachfolger, bis Sie keine neuen Zustände mehr erhalten.

b) [1 Punkt] Vergleichen Sie die Zustandsanzahl in B mit dem Worst-Case-Wert $|\mathcal{P}(\{q_0, \ldots, q_5\})|$.

c) [1 Punkt] Konstruieren Sie einen Automaten $\overline{B}$ mit $\mathcal{L}(\overline{B}) = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

d) [3 Punkte] Geben Sie exemplarisch für das Wort $w = ababbabba$ alle möglichen Läufe von A auf w und den eindeutigen Lauf von B auf w an. Wie viele Läufe auf w gibt es in A? Gilt $w \in \mathcal{L}(A)$?

Übungsaufgabe 5:

Zeigen Sie, dass der Kleene-Stern tatsächlich ein Hüllen-Operator ist: $(L^*)^* = L^*$.

Übungsaufgabe 6:

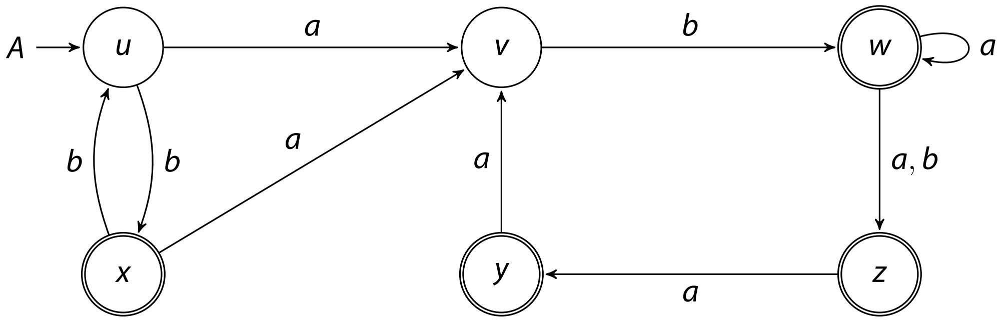
Konstruieren Sie schrittweise einen endlichen Automaten für den regulären Ausdruck über $\{a, b, c\}$

$$\left(c + a(b + ca)^*(\varepsilon + cc)\right)\left((a + b)c^* + a^*b(cb)^*\right)^* .$$

Geben Sie einen Automaten A für $(a + b)c^*$ an.
Geben Sie einen Automaten B für $a^*b(cb)^*$ an.
Geben Sie einen Automaten C für $\mathcal{L}(A) \cup \mathcal{L}(B)$ an.
Geben Sie einen Automaten D für $\mathcal{L}(C)^*$ an.
Geben Sie einen Automaten E für $c + a(b + ca)^*(\varepsilon + cc)$ an.
Geben Sie einen Automaten F für $\mathcal{L}(E).\mathcal{L}(D)$ an.

Übungsaufgabe 7:

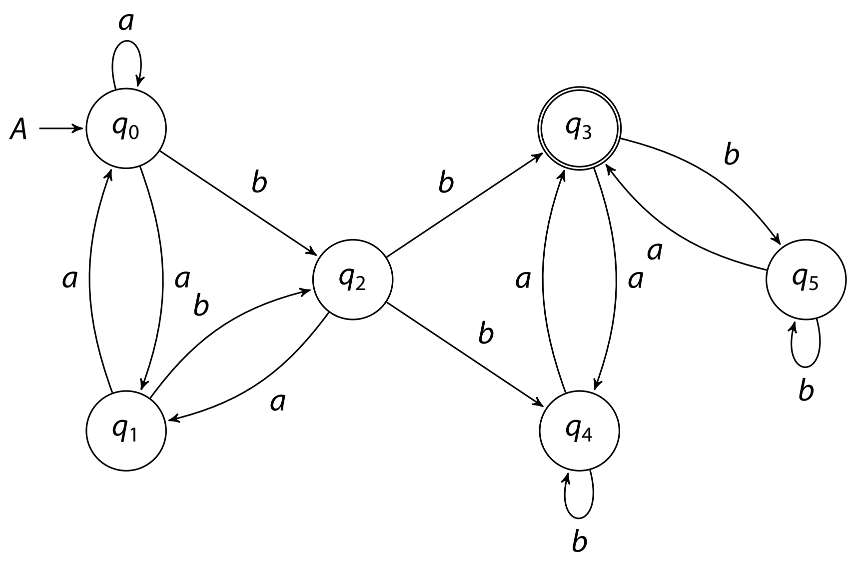
Gegeben sei der folgende NFA A über dem Alphabet $\{a, b\}$:



Geben Sie das zu A gehörige Gleichungssystem an.
Bestimmen Sie einen regulären Ausdruck für $\mathcal{L}(A)$, indem Sie das Gleichungssystem unter Verwendung von Ardens Lemma lösen.
Geben Sie insbesondere einen Ausdruck für jede Variable an.
Bestimmen Sie den einen DFA B mit $\mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(A)$ mithilfe der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.
Geben Sie einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(A)}$ an.
Beschreiben Sie, was bei diesem Verfahren passiert, falls kein akzeptierender Zustand erreichbar ist. Wie hängt der Lösungsraum mit der Sprache solch eines Automaten zusammen?

Übungsaufgabe 8:

Gegeben sei der folgende NFA A über. $\Sigma = \{a, b\}$.



Determinisieren Sie A, bestimmen Sie also einen DFA B mit $\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(B)$ unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

Hinweis: Sie können sich auf die Zustände beschränken, die vom Startzustand $\{q_0\}$ aus erreichbar sind. Konstruieren Sie hierzu zu bereits vorhandenen Zuständen ihre Nachfolger, bis Sie keine neuen Zustände mehr erhalten. Vergleichen Sie die Größe der Zustandsmenge von B mit dem Worst-Case-Wert $|\mathcal{P}(\{q_0, \ldots, q_5\})|$.

Konstruieren Sie einen Automaten $\overline{B}$ mit $\mathcal{L}(\overline{B}) = \overline{\mathcal{L}(A)}$.

Geben Sie exemplarisch für das Wort $w = ababbabba$ alle möglichen Läufe von A auf w und den eindeutigen Lauf von B auf w an. Wie viele Läufe auf w gibt es in A? Gilt $w \in \mathcal{L}(A)$?