Theoretische Informatik 1
Übungsblatt 2

René Maseli
Thomas Haas
TU Braunschweig
Wintersemester 2023/24

Ausgabe: 2023-11-10 Abgabe: 2023-11-23 23:59

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 23.11.2023 23:59 Uhr, im Vips-Verzeichnis der StudIP-Veranstaltung ab. Fertigen Sie dazu ihre Hausaufgaben direkt in .pdf Form an oder scannen ihre handschriftlichen Hausaufgaben ein. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab und geben Sie **alle** Gruppenmitglieder mit **Matrikelnummer, Namen und Studiengang** an.

Hausaufgabe 1: Join-Meet-Stetigkeit [5 Punkte]

Beweisen oder widerlegen Sie, ob die folgenden Aussagen stimmen.

a) [2 Punkte] Seien $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ positive ganze Zahlen und $D := \{ k \in \mathbb{N} \mid k \mid n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \}$ die Menge der Teiler des Produkts $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Betrachte den Verband $\langle D, \mid \rangle$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_a : D \to D$ $\sqcap$-stetig ist.

$$f_a(x) = \mathrm{ggt}(n_1, \mathrm{kgv}(n_2, n_3 \cdot x))$$

b) [1 Punkt] Sei M eine endliche Menge, $R \subseteq M \times M$ eine binäre Relation über M. Betrachte den vollständigen Verband $\langle \mathcal{P}(M), \subseteq \rangle$. Zeigen Sie, dass $f_b : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ **nicht** $\sqcup$-stetig ist.

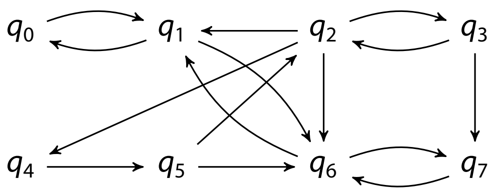
$$f_b(X) = \{ y \in M \mid \forall x \in M : \langle x, y \rangle \in R \Rightarrow x \in X \}$$

c) [2 Punkte] Sei $\langle B, E, \to \rangle$ ein Kontrollflussgraph. Betrachte den Verband $\langle \mathcal{P}(\mathrm{Var})^B, \subseteq^B \rangle$, wobei jedes Paar $F, G : B \to \mathcal{P}(\mathrm{Var})$ geordnet ist nach $F \subseteq^B G$ gdw. $\forall b \in B : F(b) \subseteq G(b)$. Wir schreiben, ein Block *benutze* eine Variable, wenn diese Variable in einem Ausdruck des Blocks (außer dem Ziel einer Zuweisung) vorkommt. Zeigen Sie, dass die Funktion $f_c : \mathcal{P}(\mathrm{Var})^B \to \mathcal{P}(\mathrm{Var})^B$ $\sqcup$-stetig ist.

$$f_c(X)(b) = \left\{ x \,\middle|\, \exists b' \in B : b \to b' \text{ und } (b' \text{ benutzt } x \text{ oder } (b' \neq [x := e]^\ell \text{ und } x \in X_{b'})) \right\}$$

Hausaufgabe 2: Erreichbarkeit in Graphen [8 Punkte]

Finden Sie alle von den Startknoten erreichbaren Knoten im folgenden Graphen $G = \langle V, E \rangle$.



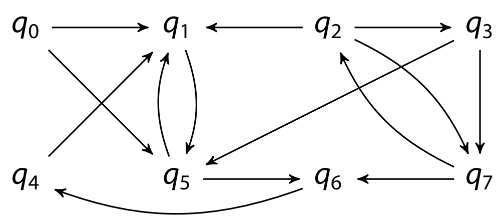
Sei $v \in V$ ein Startknoten. Betrachten Sie die Funktion $f_v : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ mit $f_v(X) := \{ y \mid y = v \text{ oder } \exists x \in X : \langle x, y \rangle \in E \}$.

a) [4 Punkte] Berechnen Sie $\mathrm{lfp}(f_{q_0})$ mit Hilfe der im Fixpunktsatz von Kleene benutzten Folge.

b) [4 Punkte] Berechnen Sie $\mathrm{lfp}(f_{q_2})$ mit Hilfe der im Fixpunktsatz von Kleene benutzten Folge.

Hausaufgabe 3: Unerreichbarkeit in Graphen [10 Punkte]

Finden Sie alle Knoten des folgenden Graphen $G = \langle V, E\rangle$, welche **nicht** vom Startknoten q_0 erreichbar sind.



Betrachten Sie die Funktion $f : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}(V)$ mit $f(X) = \{\, v \in V \mid v \neq q_0 \text{ und } (\forall x \in V \setminus X\colon \langle x, v\rangle \notin E)\,\}$.

a) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass f im Verband $\langle \mathcal{P}(V), \subseteq\rangle$ monoton ist.

b) [3 Punkte] Zeigen Sie, dass f $\sqcap$-stetig in $\langle \mathcal{P}(V), \subseteq\rangle$ ist.

c) [4 Punkte] Berechnen Sie gfp(f) unter Verwendung des Kleene'schen Fixpunktsatzes.

Hausaufgabe 4: Live Variables [9 Punkte]

Betrachten Sie das folgende Programm.

$[x := 0]^0$
while $[x^2 < y]^1$ **do**
  $[z := x + 1]^2$
  $[x := z^2 + z]^3$
end while
if $[x^2 = y]^4$ **then**
  $[z := 1]^5$
else
  $[z := y]^6$
end if
$[\mathrm{x} := \mathrm{z}]^7$

Weisen Sie jedem Block des linken Programms die Menge an Variablen zu, die nach diesem Block noch benutzt werden könnten.

a) [1 Punkt] Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G. Markieren Sie die Extremal-Blöcke. Beachten Sie, dass es sich hier um eine Rückwärts-Analyse handelt.

b) [3 Punkte] Betrachten Sie den Verband $D = \langle \mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subseteq\rangle$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ eine geeignete monotone Transferfunktion f_b über diesem Verband an.

c) [5 Punkte] Betrachten Sie das Datenflusssystem $\langle G, D, \{x, y, z\}, (f_b)_{b \in B}\rangle$. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.

Übungsaufgabe 5:

Betrachten Sie das folgende Programm.

$[x := 0]^0$
while $[x < 2^4]^1$ **do**
  $[y := 3x + 2]^2$
  while $[y < 5x]^3$ **do**
    $[y := y + 2]^4$
    if $[3x < y]^5$ **then**
      $[x := x + 1]^6$
    end if
  end while
end while
$[x := x - 14]^7$

Finden sie zu jedem Block des rechten Programms die Menge der Zuweisungen, welche eine Variable als letztes überschrieben haben könnten, bevor dieser Block beginnt.

Zeichnen Sie den Kontrollflussgraphen G. Markieren Sie insbesondere die Extremal-Blöcke. Beachten Sie, dass es sich hier um eine Vorwärts-Analyse handelt.

Betrachten Sie den Verband $D = \langle \mathcal{P}(\{x, y\} \times (B + \{?\})), \subseteq \rangle$. Geben Sie für jeden Block $b \in B$ eine geeignete monotone Transferfunktion f_b über diesem Verband an.

Betrachten Sie das Datenflusssystem $\langle G, D, \{(x, ?), (y, ?)\}, (f_b)_{b \in B} \rangle$. Geben Sie das induzierte Gleichungssystem an und bestimmen Sie seine kleinste Lösung mit dem Satz von Kleene.