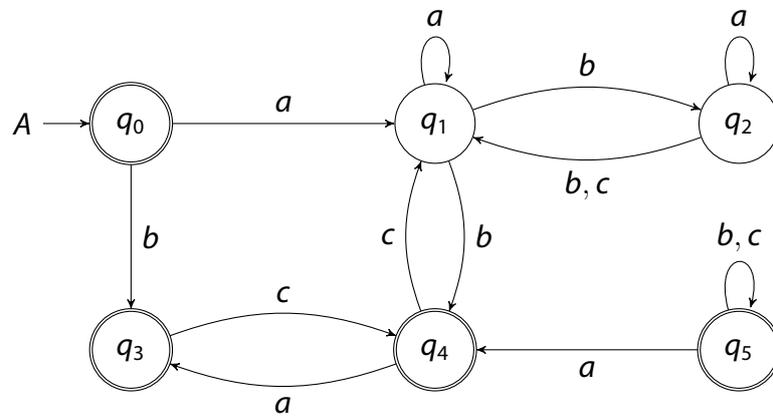


1 Determinisierung und Komplementierung

10 points

Berechnen Sie einen DFA zur Komplementsprache $\overline{\mathcal{L}(A)}$ der Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie hierzu die Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion aus der Vorlesung. Konstruieren Sie nur die vom Startzustand erreichbaren Zustände.



2 CYK

10 points

Betrachten Sie die kontextfreie Grammatik $G = \langle \{S, A, B, C\}, \Sigma, P, S \rangle$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, mit den folgenden Produktionsregeln.

$$S \rightarrow AA \mid BA \mid BB,$$

$$A \rightarrow a \mid AC \mid BC,$$

$$B \rightarrow b \mid CS,$$

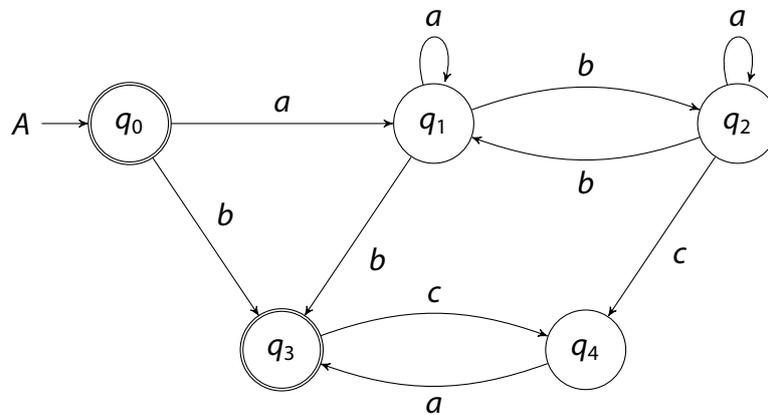
$$C \rightarrow b.$$

- Nutzen Sie den Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob das Wort $w = bbbaaa$ von der kontextfreien Grammatik G erzeugt wird. Füllen Sie die Tabelle vollständig aus.
- Wie viele Präfixe von w liegen in der Sprache von G ? Ein Wort $x \in \Sigma^*$ ist ein Präfix von w , wenn w von der Form $w = x.y$ mit $y \in \Sigma^*$ ist.

3 NFA zu REG mit Ardens Lemma

10 points

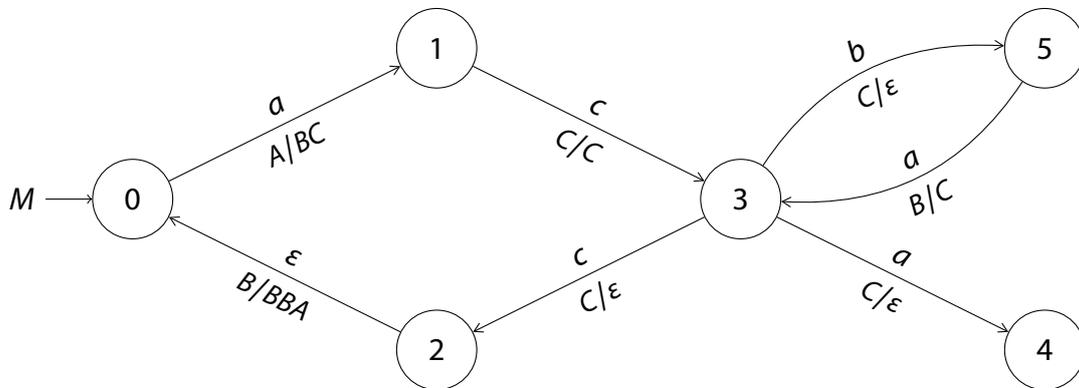
Geben Sie einen regulären Ausdruck an, der die Sprache $\mathcal{L}(A)$ des folgenden NFA A über $\Sigma = \{a, b, c\}$ beschreibt. Stellen Sie hierzu ein Gleichungssystem auf und lösen Sie es unter Verwendung von Ardens Lemma.



4 Tripelkonstruktion

10 points

Betrachten Sie den Pushdown-Automaten $M = \langle \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c\}, \{A, B, C\}, q_0, A, \delta \rangle$, der mit leerem Stack akzeptiert und dessen Transitionsrelation δ wie folgt definiert ist.



- Beschränken Sie Ihren Suchraum für nützliche Nichtterminale. Welche Zustände besitzen kein Verhalten mit bestimmten Stapel-Symbole als Top? Welche Zustände kommen nicht als Ende einer Berechnung in Frage?
- Verwenden Sie die Tripelkonstruktion aus der Vorlesung, um eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(G)$ zu bestimmen.
- Entfernen Sie alle unnützlichen Nicht-Terminale aus G .

5 Pumping-Lemma

7 + 3 = 10 points

Es sei $\Sigma = \{a, b\}$. Betrachten Sie die Sprachen

$$L = \{ a^n \cdot b^m \mid n, m \in \mathbb{N}, n \text{ ist gerade oder } n = 3m \} \text{ und}$$

$$L' = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist gerade oder } |w|_a = 3|w|_b \}.$$

- Zeigen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass L nicht regulär ist.
- Zeigen Sie, welche Konsequenz sich dadurch für die Sprache L' ergibt.

6 Automatenkonstruktion

5 + 5 = 10 points

Betrachten Sie die Sprache $L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \neq 2|w|_b + 1 \}$.

- a) Konstruieren Sie einen PDA M , der L akzeptiert. Geben Sie insbesondere die Akzeptanzbedingung ihres Automaten an.
- b) Erklären Sie jeden Zustand und jedes Bandsymbol ihrer Konstruktion.

7 Verband der Quasi-Ordnungen

2 + 4 + 3 + 1 = 10 points

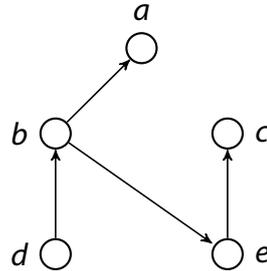
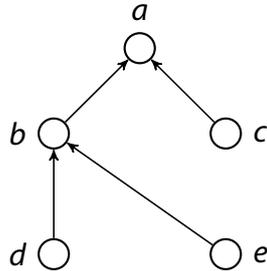
Sei X eine beliebige Menge. Wir definieren die Menge $QO(X) \subseteq \mathcal{P}(X \times X)$ aller Quasi-Ordnungen auf X , d.h. reflexive und transitive binäre Relationen.

- a) Zeigen Sie, dass $QO(X)$ unter beliebigen (potentiell unendlichen) Durchschnitten abgeschlossen ist.
- b) Wir definieren den Abschlussoperator $cl : \mathcal{P}(X \times X) \rightarrow QO(X)$ wie folgt:

$$cl(R) = \bigcap \{A \in QO(X) \mid R \subseteq A\}.$$

Zeigen Sie nun, dass cl folgende Eigenschaften erfüllt:

- cl ist surjektiv.
 - cl ist monoton.
 - cl ist idempotent, d.h. $cl(cl(R)) = cl(R)$.
- c) $\langle QO(X), \subseteq \rangle$ ist ein vollständiger Verband. Geben Sie dessen Join, Meet, Top und Bottom an.
- d) Gegeben sind Hasse-Diagramme zweier Quasi-Ordnungen $R, S \in QO(\{a, b, c, d, e\})$. Zeichnen Sie ein Hasse-Diagramm von $R \sqcup S$.



8 Quiz

$2 + 2 + 3 + 3 = 10$ points

Bestimmen Sie zu jeder der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Geben Sie jeweils einen kurzen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

- Sei L_1 eine kontextfreie Sprache und L_2 regulär. Ist $L_1 \setminus L_2$ immer kontextfrei?
- Es sei $k \in \mathbb{N}$. Die Sprachklasse Reg_k enthalte genau die Sprachen von DFA mit bis zu k Zuständen. Ist Reg_k unter Vereinigung abgeschlossen?
- Sei L_1 kontextfrei. Haben alle Grammatiken für L_1 in Chomsky-Normalform die selbe Anzahl von nützlichen Nichtterminalen?
- Sei $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband und $f : D \rightarrow \mathcal{P}(D)$ mit $f(d) = \{ d' \in D \mid d' \sqsubseteq d \}$. Damit enthält $f(D) = \{ f(d) \mid d \in D \} \subset \mathcal{P}(D)$ die „nach unten geöffneten“ Teilmengen von D . Ist $\langle f(D), \sqsubseteq \rangle$ ein vollständiger Verband?

9 Myhill-Nerode

6 + 3 + 1 = 10 points

Betrachten Sie die folgende Sprache

$$L = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \leq |w|_b \}.$$

Es wird die folgende Gleichung vermutet:

$$[a^n]_{\equiv_L} = \{ w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = n + |w|_b \}.$$

- Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, die Äquivalenzklasse $[a^n]_{\equiv_L}$ wie oben charakterisiert ist.
- Nutzen Sie dieses Wissen und den Satz von Myhill & Nerode, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist.
- Finden Sie einen Repräsentanten für jede weitere, bisher nicht genannte Klasse.

10 Purer Pushdown-Automat

4 + 6 = 10 points

Ein purer Pushdown-Automat über einem Alphabeten Σ ist ein 3-Tupel $M = \langle \Gamma, \alpha, T \rangle$ mit initialem Stapelinhalt $\alpha \in \Gamma^*$, mitunter auch ein ganzes Wort, und einer endlichen Transitionsrelation $T \subseteq \Gamma^* \times (\Sigma \cup \varepsilon) \times \Gamma^*$. Diese Automaten sind in der Lage mit einer einzigen Transition ganze Wörter aus dem Stapel zu entfernen und können daher mehr als nur das Top-Symbol sehen.

Ohne Zustand besteht eine Konfiguration nur aus dem Stapelinhalt Γ^* . Jede Transition $\langle x, s, y \rangle \in T$ liest den Buchstaben s aus der Eingabe und ersetzt den exakten oberen Inhalt $x \in \Gamma^*$ mit $y \in \Gamma^*$, ganz gleich welcher Inhalt $\beta \in \Gamma^*$ weiter unten steht. Dadurch entsteht die Transitionsrelation \rightarrow_M über Konfigurationen. Es gilt $\beta.x \xrightarrow{s}_M \beta.y$ für alle $\langle x, s, y \rangle \in T$ und aus $\beta_1 \xrightarrow{w_1}_M \beta_2$ und $\beta_2 \xrightarrow{w_2}_M \beta_3$ folgt immer $\beta_1 \xrightarrow{w_1 w_2}_M \beta_3$.

Ein Wort $w \in \Sigma^*$ wird akzeptiert, sobald es vollständig abgearbeitet und der Stapel geleert wurde. Die Sprache von M ist daher $\mathcal{L}(M) := \{ w \in \Sigma^* \mid \alpha \xrightarrow{w}_M \varepsilon \}$.

- Zeigen Sie, dass jede kontextfreie Sprache durch einen puren Pushdown akzeptiert wird.
- Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}(M)$ jedes puren Pushdown-Automaten M kontextfrei ist.