

Theoretische Informatik 1

Übungsblatt 5

Thomas Haas
Prof. Dr. Roland Meyer

TU Braunschweig
Wintersemester 2019/20

Ausgabe: 07.01.2020

Abgabe: 16.01.2020, 15:00

Geben Sie Ihre Lösungen bis Donnerstag, 16.01.2020, 15:00 Uhr, durch Einwerfen in die Übungskästen neben Büro IZ 343 ab. Geben Sie in Gruppen von 4 Personen ab.

Aufgabe 1: Äquivalenzklassen [7 Punkte]

a) [4 Punkte] Betrachten Sie

$$\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} [a^n]_{\equiv_{\mathcal{L}}} &= \{a^n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \\ [a^{\ell+1} \cdot b]_{\equiv_{\mathcal{L}}} &= \{a^{\ell+1} \cdot b^{\ell+1-n} \mid \ell \in \mathbb{N}, \ell \geq n\} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

gilt.

Geben Sie alle weiteren Äquivalenzklassen bezüglich $\equiv_{\mathcal{L}}$ an. Bestimmen Sie insbesondere für alle $n, m \in \mathbb{N}$, in welcher Äquivalenzklasse $a^n b^m$ liegt. (Sie müssen Ihre Angaben für die weiteren Äquivalenzklassen nicht formal beweisen.)

b) [3 Punkte] Betrachten Sie die Sprache

$$\mathcal{L} = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ enthält } aa \text{ oder } bb\}.$$

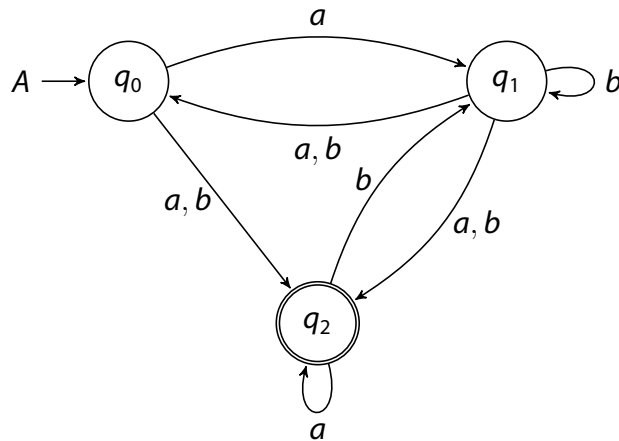
Bestimmen Sie alle Äquivalenzklassen von $\equiv_{\mathcal{L}}$.

Geben Sie den Äquivalenzklassenautomaten $A_{\mathcal{L}}$ an.

Hinweis: Mit „enthält aa “ ist hier gemeint, dass w von der Form $w = w_1 \cdot a \cdot a \cdot w_2$ ist.

Aufgabe 2: Minimierung [8 Punkte]

Betrachten Sie den folgenden NFA A über $\{a, b\}$.



- a) [2 Punkte] Konstruieren Sie einen zu A sprachäquivalenten DFA B unter Verwendung der Rabin-Scott-Potenzmengenkonstruktion.

Stellen Sie sicher, dass B keine unerreichbaren Zustände enthält.

- b) [3 Punkte] Bestimmen Sie auf den Zuständen von B die \sim -Äquivalenzklassen unter Verwendung des Table-Fillings-Algorithmus aus der Vorlesung.

Geben Sie an, in welcher Reihenfolge Sie die Zellen in der Tabelle markiert haben.

- c) [2 Punkte] Geben Sie den minimalen DFA C für $\mathcal{L}(A)$ an. Verwenden Sie hierzu die \sim -Äquivalenzklassen.

- d) [1 Punkt] Vergleichen Sie die Zustandsanzahl von A , B und C .

Aufgabe 3: Pumping-Lemma [6 Punkte]

- a) [3 Punkte] Betrachte $\Sigma = \{a, b\}$. Zu einem Wort w sei $|w|_a$ die Anzahl der Vorkommen von Buchstabe a in w , $|w|_b$ analog.

Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b + 7 > |w|_a\}$$

nicht regulär ist.

- b) [3 Punkte] Beweisen Sie unter Verwendung des Pumping-Lemmas, dass die Sprache

$$\mathcal{L} = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$$

nicht regulär ist.

Hinweis: Überlegen Sie sich folgendes: Für eine gegebene Zahl $n \in \mathbb{N}$, welche Zahl ist durch jede Zahl $\leq n$ teilbar?

Aufgabe 4: Kontextfreie Grammatiken [10 Punkte]

a) Geben Sie kontextfreie Grammatiken an, die folgende Sprachen über $\Sigma = \{a, b\}$ erzeugen:

i) [2 Punkte] $\mathcal{L}_1 = \{w \in (\Sigma \cup \{(,)\})^* \mid w \text{ ist korrekt geklammert.}\}$

ii) [2 Punkte] $\mathcal{L}_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

iii) [2 Punkte] $\mathcal{L}_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \neq |w|_b\}$

b) Eine kontextfreie Grammatik G heißt **regulär**, wenn sie linkslinear oder rechtslinear ist. Rechtslinear bedeutet, dass alle Produktionsregeln auf ihrer rechten Seite höchstens ein Nichtterminal besitzen, welches (wenn es existiert) das rechteste Symbol ist. Die Regeln sind also alle von der Form $X \rightarrow w$ oder $X \rightarrow w.Y$ mit $w \in \Sigma^*$. Linkslinearität ist analog definiert.

Beweisen Sie, dass die regulären Sprachen genau die Sprachen sind, die als $\mathcal{L}(G)$ für eine rechtslineare Grammatik auftreten.

- [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einem gegebenen NFA A eine rechtslineare Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.
- [2 Punkte] Erklären Sie, wie man zu einer gegebenen rechtslinearen Grammatik G einen NFA A mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(A)$ konstruieren kann.

Bemerkung: Ein analoges Resultat gilt auch für linkslineare Grammatiken, deshalb spricht man in beiden Fällen von **regulären** Grammatiken.