

Übungen zur Vorlesung
 Programmanalyse
 Blatt 7

Abgabe bis 13.12.2023

Aufgabe 7.1 (Galois-Verbindungen)

Geben Sie für die folgenden Paare (α, γ) jeweils an, ob es sich um eine Galoisverbindung handelt. Ist dies nicht der Fall, so geben Sie je ein Gegenargument oder Gegenbeispiel an.

| | L | M | α | γ |
|----|--|--|---|---|
| a) | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$ | $(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ | $z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$ | $m \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in m\}$ |
| b) | $(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$ | $l \mapsto \bigsqcup\{z \mid z \in l\}$ | $z \mapsto \{z\}, -\infty \mapsto \emptyset, \infty \mapsto \mathbb{Z}$ |
| c) | $(\mathbb{Z} \cup \{\perp, \top\}, \sqsubseteq)$ | $(\mathbb{P}(\mathbb{Z}), \subseteq)$ | $z \mapsto \{z\}, \top \mapsto \mathbb{Z}, \perp \mapsto \emptyset$ | $m \mapsto \bigsqcup\{a \mid a \in m\}$ |
| d) | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}, \leq)$ | $(\mathbb{Z}_{\pm\infty}^2, \leq^2)$ | $l \mapsto (l, l)$ | $(l_1, l_2) \mapsto l_1$ |
| e) | $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ | $(\text{conv } \mathbb{R}^2, \subseteq)$ | $l \mapsto \text{conv}(l)$ | $m \mapsto m$ |

Dabei sind

- $z \in \mathbb{Z}, l \in L, m \in M$.
- $\mathbb{Z}_{\pm\infty} := \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $-\infty \leq +\infty$ und für alle $z \in \mathbb{Z}$ gilt $-\infty \leq z, z \leq +\infty$.
- $z_1 \sqsubseteq z_2$ gdw. $z_1 = \perp \vee z_2 = \top$.
- $(l_1, l_2) \leq^2 (l_3, l_4)$ wenn $l_1 \leq l_3$ und $l_2 \leq l_4$ für $l_1, l_2, l_3, l_4 \in \mathbb{Z}_{\pm\infty}$.
- $\text{conv } \mathbb{R}^2$ die *konvexen Mengen* über \mathbb{R}^2 bzw. $\text{conv}(l)$ die *konvexe Hülle* von l . Eine Teilmenge $m \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt *konvex*, wenn jede Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten in m selbst vollständig in m liegt. Die konvexe Hülle $\text{conv}(l)$ ist die kleinste konvexe Menge m , die l enthält.

Aufgabe 7.2 (Galois-Verbindungen)

Seien (L, \leq_L) und (M, \leq_M) vollständige Verbände. Zeigen Sie:

- a) Ist $L' \subseteq L$ und (α, γ) eine Galois-Verbindung, so gilt $\alpha(\bigsqcup L') = \bigsqcup \alpha(L')$.
- b) Zu jeder vollständig additiven Funktion $\alpha : L \rightarrow M$ gibt es eine Funktion $\gamma : M \rightarrow L$, so dass (α, γ) eine Galois-Verbindung ist.

Aufgabe 7.3 (Array-Bound-Analyse)

Angenommen, Sie untersuchen ein Programm, welches auf einem Array statischer Größe arbeitet. Das Programm verwaltet einen Zeiger, über den es auf einzelne Elemente des Arrays zugreifen kann. Wir nehmen an, dass der Zeiger einen Wert aus \mathbb{Z} annimmt. Die tatsächliche Struktur des Arrays vernachlässigen wir und beschreiben sie stattdessen mit D . Der Datenbereich des Programms ist also $\mathbb{Z} \times D$.

Sie wollen nun wissen, ob das Programm die Grenzen des Arrays respektiert. Geben Sie einen endlichen vollständigen Verband M an, der eine Array-Bound-Analyse ermöglicht. Geben Sie außerdem eine Galoisverbindung von $L := \mathcal{P}(\mathbb{Z} \times D)$ nach M an.

Hinweis: Die Grenzen des Arrays sind vorher bekannt. Sie können also eine Größe k für das Array annehmen. Der Zeiger ist also der Index des Arrays.

Abgabe bis 13.12.2023 per E-Mail an j.tepe@tu-braunschweig.de