SS 2024 24. Juni 2024

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 6

Jens Gutsfeld,
Sören van der Wall Abgabe bis Fr, 05. Juli 2024 um 23:59

Aufgabe 6.1 (Substitution — **15 Pkt**)
Beweisen Sie das Substitutionslemma (Lemma 4.19) aus der Vorlesung: Sei $A \in \mathsf{FO}(S)$ eine Formel, $\mathcal{M}$ eine S-Struktur, σ eine Belegung, $x \in V$ eine Variable und $t \in Term(S)$ ein Term. Es gilt:

$$\mathcal{M}[\![A\{x/t\}]\!](\sigma) = M[\![A]\!]\big(\sigma\{x/M[\![t]\!]\,(\sigma)\}\big) \ .$$

Aufgabe 6.2 (Skolemnormalform — **4 + 6 = 10Pkt**)

a) Berechnen Sie mit dem Verfahren aus der Vorlesung zu der Formel

$$(\exists x \forall y\colon p(x, f(y))) \wedge (\neg \forall y \forall x \exists z\colon\ [q(g(z), f(x)) \vee p(y, z)])$$

eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel in Skolemnormalform.

b) Zeigen Sie, dass die Skolemisierung eine Formel liefern kann, die nicht äquivalent zur Eingabeformel ist.

Betrachten Sie hierfür die Formel $A \equiv \forall x \exists y.p(x, y) \in \mathsf{FO}(S)$ und ihre Skolemisierung $B \in \mathsf{FO}(S')$. Beachten Sie, dass man A auch als Formel über Signatur $S' = S \cup \mathsf{Sko}$ auffassen kann.

Welche der folgenden Aussagen gilt?

- $A \models B$
- $B \models A$

Aufgabe 6.3 (Theorien — **3 + 3 + 4 = 10 Pkt**)

a) Gegeben eine S-Struktur $\mathcal{M}$, sei $T_{\mathcal{M}} = \{A \in \mathsf{FO}_{\mathsf{abg}}(S) \mid \mathcal{M} \models A\}$.

Zeigen Sie: $T_{\mathcal{M}}$ ist eine Theorie, vollständig und konsistent.

b) Zeigen oder widerlegen Sie: Falls T_1 und T_2 Theorien sind, so ist $T_1 \cap T_2$ auch eine Theorie.

c) Zeigen Sie: $T_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2} = \{A \mid \mathcal{M}_1 \models A \wedge \mathcal{M}_2 \models A\}$ ist eine Theorie. Ist $T_{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2}$ für alle S-Strukturen $\mathcal{M}_1$ und $\mathcal{M}_2$ vollständig?

Aufgabe 6.4 (Nichtstandardmodelle — **6 + 6 + 3 = 15 Pkt**)
In der Vorlesung haben Sie gesehen, wie man die Existenz eines Nichstandardmodels für die Arithmetik der natürlichen Zahlen beweisen kann. In dieser Aufgaben konstruieren wir analog ein Nichtstandardmodell für die Arithmetik der rationalen Zahlen.
Es sei $S = (Fun, Pred)$ die Signatur mit Funktionssymbolen $F = \{0_{/0}, 1_{/0}, +_{/2}, *_{/2}\}$ und Prädikatssymbolen $P = \{<_{/2}\}$. Außerdem sei $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, I)$ die S-Struktur, in der der Datenbereich aus den rationalen Zahlen besteht und die Symbole 0, 1, +, $*$ und $<$ wie üblich interpretiert sind, d.h. $0^{\mathcal{Q}} = 0 \in \mathbb{Q}, 1^{\mathcal{Q}} = 1 \in \mathbb{Q}, d +^{\mathcal{Q}} e = d + e \in \mathbb{Q}$, $d *^{\mathcal{Q}} e = d * e \in \mathbb{Q}$ und $d <^{\mathcal{Q}} e = 1$ gdw. $d < e$ in $\mathbb{Q}$.
Sei $T_{\mathcal{Q}}$ die Theorie der rationalen Zahlen, also die Menge der abgeschlossenen Formeln, die $\mathcal{Q}$ erfüllt:

$$T_{\mathcal{Q}} = \{A \in \mathsf{FO}_{\mathsf{abg}}(S) \mid \mathcal{Q} \models A\} \ .$$

a) Betrachten Sie die Formelmenge

$$\Sigma = T_{\mathcal{Q}} \cup \{0 < x \land (\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ Mal}}) * x < 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \ ,$$

wobei x eine *freie* Variable ist (Damit ist Σ keine Menge *abgeschlossener* Formeln mehr).

Zeigen Sie, dass Σ erfüllbar ist.

Hinweis: Benutzen Sie den Kompaktheitssatz für Prädikatenlogik.

b) Zwei Strukturen $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ über der selben Signatur heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen abgeschlossenen Formeln erfüllen, also falls $T_{\mathcal{M}_1} = T_{\mathcal{M}_2}$.

Zeigen Sie, dass jede Struktur $\mathcal{M}$, die Σ aus Aufgabenteil a) erfüllt, elementar äquivalent zu $\mathcal{Q}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass es keine Belegung $\sigma : V \to \mathbb{Q}$ gibt, so dass $\mathcal{Q}, \sigma \models \Sigma$ gilt.

Hinweis: Aufgabenteil a) zeigt, dass Σ ein Modell $\mathcal{M}$ hat, und mit Aufgabenteil b) sind $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{M}$ elementar äquivalent. Aufgabenteil c) zeigt im Wesentlichen, dass $\mathcal{Q}$ nicht isomorph *zu $\mathcal{M}$ ist. Daher nennen wir $\mathcal{M}$* Nichtstandardmodel.