Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 5

Jens Gutsfeld,
Sören van der Wall

Abgabe bis Fr, 21. Juni 2024 um 23:59

Aufgabe 5.1 (Modellierung: Semantik der Prädikatenlogik — **3 + 3 = 6 Pkt**)
Nehmen Sie an, die Signatur S enthalte die einstelligen Prädikate $\mathsf{istVogel}$ und $\mathsf{fliegen}$. Gegeben sei die Formel

$$A \equiv \forall x\colon\ (\mathsf{fliegen}(x) \rightarrow \mathsf{istVogel}(x))$$

(Beachten Sie, dass diese Formel keine freien Variablen enthält.)

a) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$. Es soll dabei mindestens ein $d \in D$ geben mit $\mathsf{fliegen}^{\mathcal{M}}(d) = 0$.

b) Geben Sie eine Struktur $\mathcal{M} = (D, I)$ der Signatur S an mit $\mathcal{M}[\![A]\!] = 1$, wobei $\{\mathsf{Amsel}, \mathsf{Schwein}, \mathsf{Airbus\ A380}\} \subseteq D$.

Aufgabe 5.2 (Auswerten von prädikatenlogischen Formeln — **15 Pkt**)
Gegeben sei die Signatur $S = (Fun, Pred)$ mit

$$\begin{array}{lcll} Fun &=& \{\mathsf{or}_{/2}, & \mathsf{not}_{/1}\} \\ Pred &=& \{\mathsf{might}_{/1}, & \mathsf{is}_{/1}\} \end{array}$$

und die S-Stuktur $\mathcal{M} = (D, I)$ mit

$$D = \{\mathfrak{t}, \mathfrak{f}, \mathfrak{m}\},$$

wobei

$$\begin{array}{lcccll} \mathsf{is}^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} \quad d = \mathfrak{t} & \text{(und 0 sonst)} \\ \mathsf{might}^{\mathcal{M}} & (d) & = & 1 & \text{gdw.} \quad d \in \{\mathfrak{t}, \mathfrak{m}\} & \end{array}$$

und

$$\mathsf{not}^{\mathcal{M}}(d) \quad = \quad \begin{cases} \mathfrak{f} & d = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{m} & d = \mathfrak{m}, \\ \mathfrak{t} & d = \mathfrak{f}, \end{cases} \qquad \mathsf{or}^{\mathcal{M}}(d, e) \quad = \quad \begin{cases} \mathfrak{t} & d = \mathfrak{t} \text{ oder } e = \mathfrak{t}, \\ \mathfrak{f} & d = \mathfrak{f} \text{ und } e = \mathfrak{f}, \\ \mathfrak{m} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie den Wahrheitswert $\mathcal{M}[\![A]\!]$ für die folgende Formel A Schritt für Schritt.

$$A \equiv \exists x\colon\ [(\mathsf{is}(x) \vee \mathsf{is}(\mathsf{not}(x))) \wedge \forall y\colon\ (\mathsf{might}\,(\mathsf{or}(y, x)) \rightarrow \mathsf{is}\,(\mathsf{or}(x, y)))]\ .$$

Hinweis: A hat keine freien Variablen, d.h. insbesondere spielt es keine Rolle, welche Belegung σ man initial wählt .

Aufgabe 5.3 (Formeln der Prädikatenlogik — **10 + 5 = 15Pkt**)
Geben Sie zu Ihrer Antwort auf die folgenden Fragen jeweils einen Beweis an (bzw. ein Gegenbeispiel).

a) Seien

$$A \equiv \exists x \forall y \colon p(x, y) \ ,$$

$$B \equiv \forall y \exists x \colon p(x, y) \ .$$

Welche der folgenden Beziehungen gelten?

- Jede Struktur, die A erfüllt, erfüllt auch B
- Jede Struktur, die B erfüllt, erfüllt auch A

b) Ist die folgende Formel eine Tautologie?

$$C \equiv \big(\forall x \colon p(x)\big) \rightarrow \big(\exists x \colon p(x)\big)$$

Aufgabe 5.4 (Semantik der Prädikatenlogik — **10 + 4 = 14 Pkt**)
In den Folien wird die Semantik einer Formel $A \in FO(S)$ in $\mathcal{M} = (D, \mathcal{I})$ definiert als eine Funktion

$$\mathcal{M}[\![A]\!] : D^V \rightarrow \mathbb{B}$$

Da eine Funktion $D^V \rightarrow \mathbb{B}$ einer Teilmenge von D^V entspricht (und umgekehrt), können wir die Semantik einer Formel A in $\mathcal{M}$ auch als eine solche definieren.

a) Definieren Sie die Semantik von Formeln $t_1 = t_2$, $p(t_1, ..., t_k)$, $\neg A$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $\exists x.A$ und $\forall x.A$, sodass $\mathcal{M}[\![A]\!]$ eine Teilmenge von DV ist $\mathcal{M}[\![A]\!] \subset D^V$.

Hinweis: Benutzen Sie Mengenoperatoren.

b) Wie muss, mit der neuen Semantik von Formeln, die Folgerungsbeziehung $\Sigma \models A$ definiert werden?