

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 4

Jens Gutfeld,
Sören van der Wall

Abgabe bis Fr, 07. Juni 2024 um 23:59

Aufgabe 4.1 (Davis-Putnam-Verfahren — 8 Pkt)

Zeigen Sie unter Verwendung des Davis-Putnam-Verfahrens aus der Vorlesung, dass die folgende aussagenlogische Formel eine Tautologie ist. Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer wenn dies möglich ist. Die anderen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel Sie angewandt haben.

$$(\neg s \wedge \neg q \wedge \neg p) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (\neg q \wedge \neg p \wedge \neg r \wedge t) \vee (r) \vee (\neg q \wedge p) \vee (p \wedge t) \vee (\neg t \wedge q) \vee (\neg p \wedge t)$$

Aufgabe 4.2 (Resolution — 8 Pkt)

Zeigen Sie mittels Resolution, dass die folgende Formel eine Tautologie ist.

$$(p \wedge q \wedge \neg t) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg q \wedge s) \vee (\neg r \wedge q) \vee (r \wedge q)$$

Aufgabe 4.3 (Tseitin — 8)

Berechnen Sie zu der Formel $(p \wedge q) \rightarrow [\neg q \rightarrow (r \wedge \neg r)]$ eine erfüllbarkeitsäquivalente Formel mithilfe des Tseitin-Verfahrens. Geben Sie zunächst den Syntaxbaum der Formel an.

Aufgabe 4.4 (König's Lemma — 16 Pkt)

Sei Σ ein Alphabet, d.h. eine endliche Menge von Symbolen. Ein endliches Wort w über Σ ist eine endliche Folge von Symbolen aus Σ , d.h. $w = a_0 \dots a_k$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i \in \{0, \dots, k\}$. Ein unendliches Wort w über Σ ist eine unendliche Folge von Symbolen aus Σ , d.h. $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ mit $a_i \in \Sigma$ für $i \in \mathbb{N}$. Ein Präfix eines Wortes $w = a_0 \dots a_k$ (bzw. $w = a_0 a_1 a_2 \dots$ für unendliches w) ist ein Wort $a_0 \dots a_j$ mit $j \leq k$ (bzw. $j \in \mathbb{N}$).

Sei L eine Präfix-abgeschlossene Menge von endlichen Wörtern über Σ , d.h. wenn ein Wort w in L enthalten ist, dann auch alle seine Präfixe.

Zeigen Sie: Wenn L unendlich ist, dann gibt es ein unendliches Wort über Σ , dessen (endliche) Präfixe alle in L enthalten sind.

Aufgabe 4.5 (Modellierung: Syntax der Prädikatenlogik — $5 \times 2 = 10$ Pkt)

Drücken Sie die folgenden Aussagen in Prädikatenlogik erster Stufe aus. Spezifizieren Sie dabei die verwendeten Funktions- und Prädikatssymbole und ihre Stelligkeit. Geben Sie die intendierte Bedeutung der Symbole an oder wählen Sie aussagekräftige Namen. Dabei soll sich möglichst viel Struktur der Aussage in der Struktur der Formel wiederfinden:

Die Aussage „Alle Vögel sind schon da“ soll also nicht mit der Formel ausgedrückt werden, die nur aus dem nullstelligen Prädikat `alleVoegelSindSchonDa` besteht, sondern z.B. mit

$$\forall x: \text{schonDa}(x)$$

wobei $S = (Fun, Pred)$ mit $Fun = \emptyset$, $Pred = \{\text{schonDa}_1\}$.

Geben Sie auch eine Struktur an, die passend ist und eine, die unpassend ist. Eine passende Struktur wäre oben (D, \mathcal{I}) , wobei D die Menge aller Vögel ist und $\mathcal{I}(\text{schonDa})$ eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{B}$ die den heimischen Vögeln `true` zuweist. Eine andere Struktur, die die intendierte Bedeutung ignoriert, wäre $D = \{0\}$ und $\mathcal{I}(\text{schonDa})(0) = \text{true}$.

- a) Rätselzwerge wohnen im Berg.
- b) Es gibt jeden Sommer einen Tag, der heißer ist als 30 Grad.
- c) Es gibt ein Level in Tetris, bei dem das Spiel abstürzt.
- d) Niemand kann fliegen.
- e) Jeder hat gute und schlechte Tage.