

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Aufgabenblatt 3

Jens Gutsfeld,
Sören van der Wall

Abgabe bis Fr, 24. Mai 2024 um 23:59

Aufgabe 3.1 (Logische Äquivalenz — 10 Pkt)

Zeigen Sie, dass \models nicht nur eine Äquivalenzrelation ist, sondern eine Kongruenz. Also, gegeben Formeln $A \models A'$ und $B \models B'$, dass gilt $\neg A \equiv \neg A'$ und $A \star B \models A' \star B'$.

Hinweis: Formal machte man eine Induktion über alle Formeln C in denen A als Teilformel vorkommt und das obige ist der entsprechende Induktionsschritt.

Aufgabe 3.2 (Gentzen-Sequenzkalkül — 3 + 3 = 6 Pkt)

Zeigen Sie die folgenden Aussagen im Gentzen-Sequenzkalkül. Notieren Sie die Beweise wie in der Vorlesung bottom-up und baumartig. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel angewandt wurde.

- a) $\vdash_G (p \wedge q) \rightarrow (p \vee r)$
- b) $\neg(p \rightarrow q) \vdash_G q \rightarrow p$

Aufgabe 3.3 (Tableau — 3 + 3 + 12 = 18 Pkt)

- a) Zeigen Sie unter Verwendung eines Tableaus, dass $(p \rightarrow (q \wedge r)) \wedge ((r \rightarrow \neg q) \wedge p)$ unerfüllbar ist.
- b) Zeigen Sie unter Verwendung eines Tableaus, dass $(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ eine Tautologie ist.
- c) Zeigen Sie das Lemma von Hintikka (Lemma 3.4): Sei Θ eine vollständige Menge. Es gilt:

$$\Theta \text{ ist erfüllbar} \iff \Theta \text{ ist offen}$$

Hinweis: Die Richtung \Rightarrow ist deutlich leichter. Für die Richtung \Leftarrow nutzen Sie den Ansatz aus der Vorlesung: Konstruieren Sie eine Belegung, von der Sie denken, dass sie Θ erfüllt, und beweisen Sie per Induktion über die Strukturtiefe (Blatt 1) der Formeln in Θ , dass sie tatsächlich Θ erfüllt.

Aufgabe 3.4 (Normalformen — $2 + 2 + 2 = 6$ Pkt)

Berechnen Sie für die Formel $(p \vee q) \wedge (r \rightarrow \neg p) \wedge [\neg p \leftrightarrow (s \wedge \neg q)]$ eine äquivalente

- a) NNF
- b) DNF
- c) KNF

Aufgabe 3.5 (NNF — 10 Pkt)

Zeigen Sie Lemma 3.13: Zu jeder Formel $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$ gibt es eine äquivalente NNF A' mit $A \models A'$.

Hinweis: Nutzen Sie Strukturelle Induktion und verwenden Sie als Induktionsvoraussetzung, dass nicht nur A sondern auch $\neg A$ bereits eine äquivalente NNF besitzt.