SS 2024 24. Juni 2024

Große Übung zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Präsenzaufgabenblatt 5

Jens Gutsfeld,
Sören van der Wall Präsentation am Mo, 24. Juni 2024

Präsenzaufgabe 5.1 (Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik I)
Sei S eine Signatur. Sei $\Gamma \subseteq \mathsf{FO}^{\neq}(S)$ eine Menge prädikatenlogischer Formeln in geschlossener Skolemnormalform ohne $=$.
Zeigen Sie den Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik (für geschlossene Skolemnormalformen): Γ ist erfüllbar genau dann, wenn jede endliche Teilmenge von Γ erfüllbar ist.
Hinweis: Nutzen Sie die Herbrand Expansion auf Formelmengen:

$$E(\Sigma) = \bigcup_{A \in \Sigma} E(A)$$

Präsenzaufgabe 5.2 (Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik II)
Es sei A eine Formel der Prädikatenlogik erster Stufe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Modell $\mathcal{M}$ besitzt mit $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

a) Geben Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n an, so dass für jede Struktur $\mathcal{M}$ gilt: $M \models B_n$ genau dann, wenn $|\mathcal{M}| \geqslant n$.

b) Betrachten Sie die Menge $\Sigma = \{A \wedge B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie unter Verwendung des Kompaktheitssatzes für Prädikatenlogik, dass Σ erfüllbar ist.

c) Zeigen Sie, dass A ein unendliches Modell besitzt.

d) Schließen Sie, dass es keine Formel C gibt, so dass $\mathcal{M} \models C$ genau dann, wenn $\mathcal{M}$ eine endliche Domäne besitzt.

Präsenzaufgabe 5.3 (Vollständige und konsistente Theorien)
Sei Σ eine Theorie. Zeigen Sie: Σ ist vollständig, genau dann wenn es keine Formel $A \in \mathsf{FO}(S)$ gibt, sodass $T_{\Sigma \cup \{A\}}$ und $T_{\Sigma \cup \{\neg A\}}$ konsistent sind.