1. Davis Putnam

10 Punkte

Benutzen Sie das Davis-Putnam-Verfahren aus der Vorlesung, um zu bestimmen, ob die folgende aussagenlogische Formel erfüllbar ist. Verwenden Sie dabei die Unit-Regel immer, wenn dies möglich ist. Die anderen Regeln dürfen Sie nach Belieben verwenden. Notieren Sie in jedem Schritt, welche Regel Sie angewandt haben.

$$(p \lor q \lor r) \land (\neg p \lor \neg r \lor s) \land (q \lor s \lor \neg t) \land t \land (\neg p \lor \neg t \lor q \lor \neg r) \\ \land (\neg p \lor r \lor \neg t) \land (\neg t \lor p \lor r \lor \neg s) \land (t \lor s \lor p)$$

2. Tableaux-Methode

Bilden Sie ein vollständiges Tableaux zu der Formel A.

$$A \equiv \left[\Big((p \vee \neg r) \wedge \neg q \Big) \vee q \right] \rightarrow \left[\neg p \wedge \Big((q \rightarrow \neg p) \rightarrow (q \vee \neg r) \Big) \right]$$

Hierbei sind die eckigen Klammern gleichbedeutend mit runden Klammern; sie wurden lediglich zur besseren Lesbarkeit verwendet.

Geben Sie außerdem eine möglichst kleine Formel in disjunktiver Normalform an, die zu A äquivalent ist.

3. Resolutionsmethode

$\boxed{\text{10 Punkte}}$

Zeigen Sie mithilfe der Resolutionsmethode, dass

$$\Big\{(\neg q \lor p \lor \neg q),\ (s \lor p \lor \neg q),\ (r \lor q),\ (s \lor q \lor \neg r),\ (\neg s \lor q)\Big\} \vDash (p \land q)$$

nicht gilt. Denken Sie daran, dass die Resolutionsmethode eine KNF als Eingabe erwartet.

4. Beweisen im Kalkül $\mathcal{F}_0$

10 Punkte

Beweisen Sie

$$\vdash_{\mathcal{F}_0} \left[r \to \Big((p \to r) \to q\Big)\right] \to \Big((q \to \neg r) \to \neg r\Big).$$

Sie dürfen neben den Axiomen und der Modus-Ponens-Regel des Kalküls $\mathcal{F}_0$ auch das Deduktionstheorem, die Inkonsistenzregel und die folgenden Lemmata verwenden. Verwenden Sie nicht die Vollständigkeit von $\mathcal{F}_0$.

$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (B \to A)$	Ax1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$	Ax2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$	Ax3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg\neg A \to A$	Bsp 2.11
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to A$	Lem 0
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$	Lem 1
$\vdash_{\mathcal{F}_0} \neg B \to (B \to A)$	Lem 2
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to \neg\neg A$	Lem 3
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$	Lem 4
$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$	Lem 5
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$	Lem 6
$\vdash_{\mathcal{F}_0} (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$	Lem 7

5. Duale Formeln

2 + 5 + 3 Punkte

Wir behandeln aussagenlogische Formeln, die nur Junktoren aus $\{\neg, \vee, \wedge\}$ enthalten. Durch das Vertauschen aller $\wedge$ und $\vee$ in einer Formel F erhalten wir die duale Formel F^*. Am Beispiel:

$$F \equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg(r \wedge q) \qquad\qquad F^* \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg(r \vee q)\,.$$

Weiterhin erhalten wir durch das Negieren aller Literale in einer Formel F die literal-negierte Formel $\overline{F}$. Am Beispiel:

$$F \equiv (p \wedge \neg q) \vee \neg(r \wedge q) \qquad\qquad \overline{F} \equiv (\neg p \wedge q) \vee \neg(\neg r \wedge \neg q)\,.$$

a) Widerlegen Sie: Falls A erfüllbar ist, dann auch A^*.

b) Zeigen Sie per struktureller Induktion: Für alle Formeln A gilt $\neg\left(\overline{A}\right) \mathrel{\models\!\!\!\dashv} A^*$.

c) Zeigen Sie: $A \mathrel{\models\!\!\!\dashv} \neg\left(\overline{A^*}\right)$.

Zu Aufgabe 5:

6. Skolem-Normalformen

3 + 3 + 4 Punkte

Sei S eine Signatur mit einem einzelnen, zweistelligen Prädikatssymbol P. Betrachten Sie Formel A.

$$A \equiv \forall x\colon \Big[P(x,x) \to \exists y\colon \big(P(x,y) \land \exists x\colon P(y,x) \big) \Big]$$

a) Berechnen Sie die bereinigte Pränexnormalform von A.

b) Berechnen Sie die Skolem-Normalform von A. Nennen Sie explizit die Änderungen an der Signatur.

c) Zeigen oder widerlegen Sie: Wenn eine geschlossene Formel F keine Existenzquantoren enthält, so ist ihre Skolem-Normalform G äquivalent zu F, d.h. $F \models\!\!\!\!\!=\!\!\!\!\!\!\dashv G$.

7. Modelle

$\boxed{3 + 2 + 5 \text{ Punkte}}$

Wir betrachten die Signatur, die ausschließlich aus dem zweistelligen Prädikatssymbol P besteht, und die folgende Formel über dieser Signatur:

$$A \equiv \begin{array}{lll} & \forall x: & P(x,x) & (1) \\ \wedge & \forall x \forall y \forall z: & \big(P(x,y) \wedge P(y,z)\big) \rightarrow P(x,z) & (2) \\ \wedge & \forall x \exists y: & P(x,y) \wedge \neg P(y,x) & (3) \\ \wedge & \forall x \exists y: & \neg(x = y) \wedge P(x,y) \wedge P(y,x) & (4) \end{array}$$

a) Begründen Sie, warum es kein Modell für A gibt, dessen Datendomäne genau zwei Elemente enthält.

b) Begründen Sie, warum $(\mathbb{N}, \mathcal{I})$ mit $I(P) = \leqslant$, d.h. die Interpretation von P ist die Relation $\leqslant$ über den natürlichen Zahlen, kein Modell für A ist.

c) Geben Sie eine Interpretation $\mathcal{I}'(P)$ auf der Datendomäne $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ an, sodass $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \mathcal{I}')$ ein Modell von A wird.

Sie müssen nicht formal die Wahrheitswerte auswerten. Beziehen Sie sich in ihrer Argumentation auf die Teilformeln (1) - (4). Per Definition sind Strukturen nicht leer.

8. Logische Folgerungen

3 + 7 Punkte

Sei S eine beliebige Signatur. Sei $\Sigma \subseteq \mathrm{FO}_{abs}(S)$ eine Menge abgeschlossener Formeln, sodass für jede abgeschlossene Formel $F \in \mathrm{FO}_{abs}(S)$ bereits $\Sigma \models F$ oder $\Sigma \models \neg F$ gilt. Sei M ein Modell für Σ. *Dabei ist* $\mathrm{FO}_{abs}(S)$ *ist die Menge aller abgeschlossener Formeln über S.*

a) Begründen Sie kurz, warum $\Sigma \models F$ und $\Sigma \models \neg F$ nicht gleichzeitig gelten können.

b) Zeigen Sie: Für jede Formel $G \in \mathrm{FO}_{abs}(S)$ gilt: Das Modell M von Σ ist genau dann ein Modell für G, wenn $\Sigma \models G$.

9. Quiz

$\boxed{2 + 2 + 3 + 3 = 10 \text{ Punkte}}$

Beantworten Sie die folgenden Fragen. Begründen Sie Ihre Antwort mit einem kurzen Beweis oder einem Gegenbeispiel.

a) Gegeben sei die Signatur mit nur einem zweistelligen Prädikatssymbol P. Gibt es eine Formel F, sodass eine Struktur genau dann ein Modell von F ist, wenn ihre Interpretation von P eine Funktion ist?

b) Zwei Strukuren M und M' heißen *elementar äquivalent*, wenn sie die gleichen geschlossenen Formeln erfüllen. Sind zwei elementar äquivalente Strukuren auch immer isomorph?

c) Wir definieren den Voting-Operator VOTE für die Aussagenlogik mit der Semantik

$$\varphi\Big(\mathrm{VOTE}(A, B, C)\Big) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi(A) + \varphi(B) + \varphi(C) \geq 2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist $\{\neg, \mathrm{VOTE}, \top\}$ eine vollständige Operatormenge?

d) Wir definieren $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ durch

$$A_1 \equiv (((p \to q) \to p) \to p) \qquad\qquad A_{i+1} \equiv A_i \to p\,.$$

Ist A_i für alle ungeraden i tautologisch?

10. Kompaktheitssatz in der Prädikatenlogik

2 + 8 Punkte

Sei S eine Signatur. Sei $T \subseteq \mathrm{FO}_{abs}(S)$ eine Teilmenge aller abgeschlossenen Formeln, die erfüllbar ist.

a) Konstruieren Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Formel B_n, sodass eine Struktur M genau dann Modell von B_n ist, wenn die Datendomäne von M mindestens n Elemente enthält.
Sie müssen nicht formal beweisen, dass Ihre Konstruktion korrekt ist.

b) Sei A eine abgeschlossene Formel, die von allen unendlichen Modellen von T erfüllt wird.
Ein Modell ist unendlich, falls die Datendomäne eine unendliche Menge ist.

Zeigen Sie: Es gibt nicht beliebig große, endliche Modelle für die Menge $T \cup \{\neg A\}$.