

1 Der Hilbert-Kalkül \mathcal{K}_0

Für Formeln in der Junktorenmenge $\mathcal{J}_0 = \{\neg, \rightarrow\}$ besteht \mathcal{K}_0 aus einem Regel-Schema und drei Axiom-Schemata:

$$\triangleright \frac{A \quad A \rightarrow B}{B} \text{ (MP) } \quad \text{Abtrennungsregel oder Modus Ponens}$$

$$\triangleright \frac{}{B \rightarrow A \rightarrow B} \text{ (Ax1)}$$

$$\triangleright \frac{}{(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C} \text{ (Ax2)}$$

$$\triangleright \frac{}{(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow A \rightarrow B} \text{ (Ax3)}$$

Die zugehörige Ableitbarkeits-Relation wird in dieser VL mit \vdash bezeichnet. Weiterhin dürfen bei Ableitungen folgende in der VL bewiesene Tautologie-Schemata verwendet werden:

$$\triangleright \text{(Th1)} \quad \vdash A \rightarrow A$$

$$\triangleright \text{(Th2)} \quad \vdash \neg\neg A \rightarrow A$$

$$\triangleright \text{(Th3)} \quad \vdash \neg B \rightarrow B \rightarrow A$$

$$\triangleright \text{(Th4)} \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B$$

$$\triangleright \text{(Th5)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$$

$$\triangleright \text{(Th6)} \quad \vdash A \rightarrow \neg B \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$$

$$\triangleright \text{(Th7)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$$

$$\triangleright \text{(Th8)} \quad \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow (\neg B \rightarrow A) \rightarrow A$$

2 Der Kalkül \mathcal{K}_{nat} der natürlichen Deduktion

Für Formeln in der Junktorenmenge $\mathcal{J}_{\text{nat}} = \{\perp, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ enthält \mathcal{K}_{nat} nur 12 Regel-Schemata, von denen genau eins (DNE) den Unterschied zwischen intuitionistischer und klassischer Logik ausmacht, verfügt also über keine Axiome. Die Regeln für die Junktoren \wedge , \rightarrow , \vee und \neg treten paarweise (modulo Symmetrie von \wedge und \vee) auf, wobei der fragliche Junktor eingeführt bzw. eliminiert wird. Im Fall von \perp wird nur die Eliminierung benötigt, ebenso für die Regel (DNE), die als einzige mehr als einen Junktor betrifft.

	Introduktion	Elimination
\wedge	$\frac{G \quad H}{G \wedge H} (\wedge i)$	$\frac{G \wedge H}{G} (\wedge e)$ sowie $\frac{G \wedge H}{H} (\wedge e)$
\rightarrow	$\frac{\begin{array}{c} [G \\ \vdots \\ H \end{array}}{G \rightarrow H} (\rightarrow i)$	$\frac{G \quad G \rightarrow H}{H} (\rightarrow e)$
\vee	$\frac{G}{G \vee H} (\vee i)$ sowie $\frac{H}{G \vee H} (\vee i)$	$\frac{G \vee H \quad \begin{array}{c} [G \\ \vdots \\ K \end{array} \quad \begin{array}{c} [H \\ \vdots \\ K \end{array}}{K} (\vee e)$
\neg	$\frac{\begin{array}{c} [G \\ \vdots \\ \perp \end{array}}{\neg G} (\neg i)$	$\frac{G \quad \neg G}{\perp} (\neg e)$
\perp	$\frac{}{\neg \perp} (\perp i)$ herleitbar!	$\frac{\perp}{G} (\perp e)$
$\neg\neg$	$\frac{G}{\neg\neg G} (\text{DNI})$ herleitbar!	$\frac{\neg\neg G}{G} (\text{DNE})$ klassisch!

Zur Unterscheidung von \mathcal{K}_0 haben wir die Ableitbarkeitsrelation mit \vdash bezeichnet.

3 Gentzens Sequenzen-Kalküle

3.1 Zwischenschritt: der einseitige ND-Sequenzen-Kalkül $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$

Die Junktorenmenge \mathcal{J}_0 bleibt unverändert, während die bisher externe Ableitbarkeitsrelation zu einem Syntax-Element mutiert: die zu manipulierenden Ausdrücke sind nicht länger Formeln, bzw., endliche Mengen von Formeln, sondern sog. einseitiger *Sequenzen* $\Gamma \vdash A$, die aus einer endlichen Formelmengge Γ und einer endlichen Formel A bestehen, mit \vdash als suggestivem Trennsymbol. Die Sequenz $\Gamma \vdash A$ ist korrekt, sofern $\bigwedge \Gamma \rightarrow A$ eine Tautologie ist. Ziel ist es, korrekte Sequenzen in ebensolche zu transformieren.

Zuächst bezeichnet Γ *Tupel von Formeln*, bei denen Reihenfolge und Häufigkeit des Auftretens der Komponenten wichtig ist. Davon zu abstrahieren obliegt den *strukturellen* Regeln

$$\frac{\Gamma, G, F \vdash H}{\Gamma, F, G \vdash H} \text{ (sch)} , \quad \frac{\Gamma, F, F \vdash H}{\Gamma, F \vdash H} \text{ (ctr)} , \quad \frac{\Gamma \vdash H}{\Gamma, F \vdash H} \text{ (wkg)}$$

Das einzige Axiom-Schema besagt, dass Prämissen ableitbar sind:

$$\frac{}{\Gamma, F, \Delta \vdash F} \text{ (ax)}$$

Die intuitionistische Variante von \mathcal{K}_{nat} liefert dann 11 *logische* Regel-Schemata:

	Introduktion	Elimination
\wedge	$\frac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \wedge H} (\wedge i)$	$\frac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash G} (\wedge e) , \quad \frac{\Gamma \vdash G \wedge H}{\Gamma \vdash H} (\wedge e)$
\rightarrow	$\frac{\Gamma, G \vdash H}{\Gamma \vdash G \rightarrow H} (\rightarrow i)$	$\frac{\Gamma \vdash G \quad \Gamma \vdash G \rightarrow H}{\Gamma \vdash H} (\rightarrow e)$
\vee	$\frac{\Gamma \vdash G}{\Gamma \vdash G \vee H} (\vee i) , \quad \frac{\Gamma \vdash H}{\Gamma \vdash G \vee H} (\vee i)$	$\frac{\Gamma \vdash G \vee H \quad \Gamma, G \vdash K \quad \Gamma, H \vdash K}{\Gamma \vdash K} (\vee e)$
\neg	$\frac{\Gamma, F \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg F} (\neg i)$	$\frac{\Gamma \vdash F \quad \Gamma \vdash \neg F}{\Gamma \vdash \perp} (\neg e)$
\perp		$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash G} (\perp e)$

Aber statt den Kalkül mit Hilfe von (DNE) für die klassische Logik anzupassen, führte Genzen dafür einen 2-seitigen Kalkül ein:

3.2 Der zweiseitige Sequenzen-Kalkül \mathcal{K}_{seq}

Zweiseitige Sequenzen $\Gamma \vdash \Delta$ mit endlichen Tupeln von Formeln sind korrekt, wenn $\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$ eine Tautologie ist.

Die strukturellen Regeln werden zu links- und rechtsseitigen Varianten verdoppelt, je nachdem auf welcher Seite von \vdash agiert wird:

R	L
$\frac{\Gamma \vdash \Delta_0, A, B, \Delta_1}{\overline{\Gamma \vdash \Delta_0, B, A, \Delta_1}} \text{ (x-R)}$	$\frac{\Gamma_0, A, B, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\overline{\Gamma_0, B, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}} \text{ (x-L)}$
$\frac{\Gamma \vdash \Delta_0, A, A, \Delta_1}{\overline{\Gamma \vdash \Delta_0, A, \Delta_1}} \text{ (c-R)}$	$\frac{\Gamma_0, A, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\overline{\Gamma_0, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}} \text{ (c-L)}$
$\frac{\Gamma \vdash \Delta_0, \Delta_1}{\overline{\Gamma \vdash \Delta_0, A, \Delta_1}} \text{ (w-R)}$	$\frac{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta}{\overline{\Gamma_0, A, \Gamma_1 \vdash \Delta}} \text{ (w-L)}$

Das einzige Axiom-Schema nimmt nun eine symmetrische Form an

$$\overline{\Gamma, F \vdash \Delta, F} \text{ (AX)}$$

Speziell im Fall $F = \perp$ kann man \perp als neutrales Element bzgl. \vee auf der rechten Seite weglassen.

Die $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$ -Einführungsregeln entstehen im Wesentlichen durch Einfügen eines Tupels (einer Menge) Δ rechts des Trennsymbols \vdash . Dagegen sind die ersten fünf $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$ -Eliminationsregeln durch Einführungsregeln auf der *linken* Seite zu ersetzen. Dabei wird die bekannte Dualität zwischen \wedge und \vee ausgenutzt, etwa in $(\wedge R)$ und $(\vee L)$, sowie $(\vee R)$ und $(\wedge L)$. Das Schema $(\rightarrow L)$ ergibt sich schließlich aus $(\vee L)$, indem man G durch $\neg G$ ersetzt und $(\neg L)$ berücksichtigt. In den folgenden acht *logischen* Regel-Schemata ist $(\perp e)$ aus $\mathcal{K}_{\text{NDseq}}$ nicht mehr berücksichtigt, hier greift der oben erwähnte Spezialfall von (ax) :

	R	L
\wedge	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, G \quad \Gamma \vdash \Delta, H}{\overline{\Gamma \vdash \Delta, G \wedge H}} \text{ (\wedge R)}$	$\frac{\Gamma, G, H \vdash \Delta}{\overline{\Gamma, G \wedge H \vdash \Delta}} \text{ (\wedge L)}$
\rightarrow	$\frac{\Gamma, G \vdash \Delta, H}{\overline{\Gamma \vdash \Delta, G \rightarrow H}} \text{ (\rightarrow R)}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, G \quad \Gamma, H \vdash \Delta}{\overline{\Gamma, G \rightarrow H \vdash \Delta}} \text{ (\rightarrow L)}$
\vee	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, G, H}{\overline{\Gamma \vdash \Delta, G \vee H}} \text{ (\vee R)}$	$\frac{\Gamma, G \vdash \Delta \quad \Gamma, H \vdash \Delta}{\overline{\Gamma, G \vee H \vdash \Delta}} \text{ (\vee L)}$
\neg	$\frac{\Gamma, F \vdash \Delta}{\overline{\Gamma \vdash \Delta, \neg F}} \text{ (\neg R)}$	$\frac{\Gamma \vdash \Delta, F}{\overline{\Gamma, \neg F \vdash \Delta}} \text{ (\neg L)}$

Der Tatsache, dass die Formeln im „Nenner“ dieser Regeln immer komplexer werden, wirkt die *Schnittregel* (engl. cut) entgegen:

$$\frac{\Gamma_0 \vdash \Delta_0, A \quad A, \Gamma_1 \vdash \Delta_1}{\overline{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash \Delta_0, \Delta_1}} \text{ (CUT)}$$

die man nach Gentzens Hauptsatz aber algorithmisch wieder aus Beweisen entfernen kann (engl. cut-elimination). Damit kann man die einzige widersprüchliche Sequenz $\emptyset \vdash \emptyset$ *nicht* aus Axiomen ableiten.

4 Vergleich der „Folge-Symbole“

In der Logik haben wir es mit einer Vielzahl von „Folge-Symbolen“ zu tun, auf unterschiedlichen Ebenen. Zu Beginn kann es schwierig sein, diese auseinanderzuhalten. Wir unterscheiden zwischen **Syntax**, **Semantik** und **Kalkülen**.

- (\rightarrow) ein 2-stelliger Junktor aus der zugrundeliegenden Signatur, insbesondere also ein Element von \mathcal{J} , und somit Teil der Sprache der Logik und somit der Syntax. Achtung: in der Literatur wird stattdessen auch der Doppelpfeil \Rightarrow oder das Obermengensymbol \supset verwendet.
- (\leftrightarrow) auch ein 2-stelliger Junktor aus der zugrundeliegenden Signatur, insbesondere also ein Element von \mathcal{J} ; lässt sich in der Semantik äquivalent mittels \rightarrow und \wedge (Konjunktion) ausdrücken.
- (\models) in dieser VL die semantische Folgerelation zwischen Formelmengen Γ und einzelnen Formeln; wird leider in der Literatur häufig auch anderweitig verwendet (“overloading”). Gehört zur Metasprache, mit der wir *über* Logik sprechen, nicht zur Sprache der Logik selber.
- (\sqsubseteq) in dieser VL die Quasiordnung auf der Menge $\mathcal{F}[\mathcal{A}]$ aller Formeln, die durch sämtliche Bewertungen induziert wird:

$$A \sqsubseteq B \quad \text{gdw.} \quad \hat{\varphi}(A \rightarrow B) = 1 \quad \text{für alle Bewertungen } \varphi \in \mathbb{B}^{\mathcal{A}}$$

Auch Teil der Metasprache, kann als *Externalisierung* des Junktors \rightarrow interpretiert werden.

Der Zusammenhang mit \models ist gegeben durch

$$A \sqsubseteq B \quad \text{gdw.} \quad \{A\} \models B$$

Informatiker sind (leider) oft schlampig, was Mengenklammern angeht.

- (\sqsupseteq) in dieser VL die durch \sqsubseteq erzeugte Äquivalenzrelation, und somit die Externalisierung des Junktors \leftrightarrow .

$$A \sqsupseteq B \quad \text{gdw.} \quad \hat{\varphi}(A \leftrightarrow B) = 1 \quad \text{für alle Bewertungen } \varphi \in \mathcal{A}^{\mathbb{B}}$$

Ebenfalls Teil der Metasprache.

- (\vdash) (1) zunächst die Ableitbarkeitsrelation zwischen Formelmengen Γ und einzelnen Formeln in einem deduktiven System und damit Teil der Metasprache; kann je nach Kalkül mit Verzierungen versehen sein zwecks besserer Unterscheidbarkeit, etwa $\vdash_{\mathcal{K}}$, oder \vdash .
- (\vdash) (2) wie in großen Teilen der neueren Literatur Trennsymbol zwischen linkem und rechtem Teil einer Sequenz in Gentzens Sequenzenkalkül, und damit Teil der Sprache desselben; Gentzen hat wohl ursprünglich den Pfeil \rightarrow benutzt, und \supset für den Implikations-Junktor. Mancuso, Galvan und Zach verwenden in ihrem Buch den Doppelpfeil \Rightarrow .