

Einführung in die Logik

Roland Meyer

TU Braunschweig

SoSe 2020

1 Grundlagen der Aussagenlogik

- Syntax
- Semantik
- Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

2 Deduktiver Aufbau der Aussagenlogik

- Deduktive Systeme
- Das deduktive System \mathcal{F}_0
- Sequenzenkalkül

3 Algorithmischer Aufbau der Aussagenlogik

- Semantische Tableaus
- Normalformen
- Davis-Putnam-Algorithmen
- Resolution

4 Grundlagen der Prädikatenlogik

- Syntax
- Semantik
- Substitution
- Normalformen
- Herbrand-Theorie
- Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit
- Untere Schranke für Allgemeingültigkeit
- Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe

5 Deduktiver Aufbau der Prädikatenlogik

- Logische Folgerung
- Das deduktive System \mathcal{F}
- Theorien erster Stufe
- Axiomatisierung

6 Algorithmischer Aufbau der Prädikatenlogik

- Semantische Tableaus
- Unifikation
- Resolution

Teil I

Aussagenlogik

Syntax der Aussagenlogik

Definition 1.1 (Syntax)

Betrachte die Menge $\Sigma = V \cup O \cup K$ mit

$V = \{p_1, p_2, \dots\}$ einer abzählbaren Menge von **Aussagevariablen**

$O = \{\neg/1, \wedge/2, \vee/2, \rightarrow/2, \leftrightarrow/2\}$ **Verknüpfungen/Junktoren**

mit Stelligkeiten

$K = \{(\, ,)\}$ Klammern.

Die Menge der **Formeln der Aussagenlogik** $F \subseteq \Sigma^*$ ist **induktiv** definiert:

- 1 $V \subseteq F$ Menge der **atomaren Aussagen**
- 2 Falls $A, B \in F$ dann $(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B) \in F$.

Induktive Definition nutzen implizit den Hüllenoperator:

F ist die **kleinste Menge**, die V enthält und 2. erfüllt.

Dieser Zusatz wird oft weggelassen.

Vereinbarungen: Abkürzungen und Prioritäten

- Beispiele für aussagenlogische Formeln sind

$$p_1, p_{101}, (((p_1 \rightarrow p_2) \wedge (\neg p_2)) \rightarrow (\neg p_1)), (p_1 \vee (\neg p_1))$$

- Äußere Klammern weglassen.
- **Prioritäten:** \neg vor \wedge vor \vee vor \rightarrow vor \leftrightarrow .
- Beispiele:

$$A \wedge B \rightarrow C \quad \text{steht für} \quad ((A \wedge B) \rightarrow C)$$

$$A \vee B \wedge C \quad \text{steht für} \quad (A \vee (B \wedge C))$$

$$\neg A \vee B \wedge C \quad \text{steht für} \quad ((\neg A) \vee (B \wedge C)).$$

- Im Zweifel: Klammern setzen.

Definition 1.2 (Bewertung)

Eine **Bewertung** der aussagenlogischen Formeln ist eine Funktion $\varphi : F \rightarrow \mathbb{B} := \{0, 1\}$, so dass Folgendes gilt

$$\varphi(\neg A) = 1 - \varphi(A)$$

$$\varphi(A \vee B) = \max(\varphi(A), \varphi(B))$$

$$\varphi(A \wedge B) = \min(\varphi(A), \varphi(B))$$

$$\varphi(A \rightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi(A) = 1 \text{ und } \varphi(B) = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\varphi(A \leftrightarrow B) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \varphi(A) \neq \varphi(B) \\ 1 & \text{falls } \varphi(A) = \varphi(B) \end{cases}$$

Beispiel: Tafel.

Belegungen und Bewertungen (Fort.)

- Sprechweise: A ist falsch unter φ , falls $\varphi(A) = 0$
 A ist wahr unter φ oder φ erfüllt A , falls $\varphi(A) = 1$.
- Darstellung von Bewertungen durch **Wahrheitstafeln**:

A	$\neg A$				
1	0				
0	1				
A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Belegungen und Bewertungen (Fort.)

- Eine **Belegung** der Variablen V ist eine Funktion $\psi : V \rightarrow \mathbb{B}$.
- Jede Bewertung φ **induziert** eine **eindeutige** Belegung ψ_φ insofern, als die Bewertung und die Belegung auf V übereinstimmen

Definition: $\psi_\varphi(p_i) := \varphi(p_i)$.

Lemma 1.3

*Jede Belegung $\psi : V \rightarrow \mathbb{B}$ lässt sich auf **genau eine** Weise zu einer Bewertung $\varphi_\psi : F \rightarrow \mathbb{B}$ **fortsetzen** insofern, als die Belegung und die Bewertung auf V übereinstimmen.*

Beweis: Tafel.

Folgerung 1.4

Jede Bewertung wird durch die Werte auf V eindeutig festgelegt.

Beweis: Tafel.

Belegungen und Bewertungen (Fort.)

Folgerung 1.5

Die Bewertung einer Formel $A \in F$ hängt nur von den Werten der in ihr vorkommenden Aussagevariablen aus V ab.

Will man also $\varphi(A)$ berechnen, genügt es, die Werte $\varphi(p)$ zu kennen für alle Aussagevariablen p , die in A vorkommen.

- **Beispiel:** Sei $\varphi(p) = 1, \varphi(q) = 1, \varphi(r) = 0$. Dann kann $\varphi(A)$ iterativ berechnet werden:

$$A \equiv \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \rightarrow \underbrace{\underbrace{q}_{1} \rightarrow \underbrace{r}_{0}}_{0}}_{0} \right)}_{0} \rightarrow \underbrace{\left(\underbrace{\underbrace{p}_{1} \wedge \underbrace{q}_{1}}_{1} \rightarrow \underbrace{r}_{0} \right)}_{0}}_{1}$$

Also gilt $\varphi(A) = 1$.

Belegungen und Bewertungen (Fort.)

Welche Werte nimmt $\varphi(A)$ an, wenn φ **alle** Belegungen durchläuft?

A definiert eine Boolesche Funktion $f_A : \mathbb{B}^V \rightarrow \mathbb{B}$.

- Ist etwa $\varphi(A) = 1$ für alle Belegungen φ ?
- Es genügt, die **endlich** vielen Belegungen der Variablen, die in A vorkommen, zu prüfen.
- Kommen n Variablen in A vor, so gibt es 2^n verschiedene Belegungen.
- Beispiel: Für die drei Variablen p, q und r aus A im obigen Beispiel gibt es 8 Belegungen, die betrachtet werden müssen.

Belegungen und Bewertungen (Fort.)

p	q	r	$q \rightarrow r$	$p \wedge q$	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	A
0	0	0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

A ist wahr unabhängig von den Werten von p, q, r ,
also für jede Bewertung φ .

Weitere solche Formeln sind:

$(A \rightarrow (B \rightarrow A)), (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ oder
 $((\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)).$

Wichtige Begriffe

Definition 1.6

Sei $A \in F$, $\Sigma \subseteq F$.

- 1.(a) A heißt **Tautologie** oder **allgemeingültig**, falls $\varphi(A) = 1$ für alle Bewertungen φ gilt. Schreibweise $\models A$.
- (b) A ist **erfüllbar**, falls es eine Bewertung φ gibt, mit $\varphi(A) = 1$.
- (c) A ist **widerspruchsvoll**, falls $\varphi(A) = 0$ für alle Bewertungen φ .
- (d) **TAUT** := $\{A \in F \mid A \text{ ist Tautologie}\}$ Menge der Tautologien.
- (e) **SAT** := $\{A \in F \mid A \text{ ist erfüllbar}\}$ Menge der erfüllbaren Formeln.
Beachte $\text{TAUT} \subseteq \text{SAT}$.

Definition (Fort.)

- 2.(a) Bewertung φ erfüllt Σ , falls $\varphi(A) = 1$ für alle $A \in \Sigma$.
Menge Σ ist erfüllbar, falls es eine Bewertung φ gibt, die Σ erfüllt.
- (b) Semantischer Folgerungsbegriff: A ist logische Folgerung aus Σ , falls $\varphi(A) = 1$ für jede Bewertung φ , die Σ erfüllt.
Man schreibt $\Sigma \models A$. Auch $A_1, \dots, A_n \models A$, falls $\Sigma = \{A_1, \dots, A_n\}$.
- (c) Die Menge $\text{Folg}(\Sigma)$ der Folgerungen aus Σ ist definiert durch:

$$\text{Folg}(\Sigma) := \{A \in F \mid \Sigma \models A\}.$$

Beispiel 1.7

- 1 $(p \vee (\neg p))$, $((p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r))$, $p \rightarrow (q \rightarrow p)$, $(p \rightarrow p)$, $(p \rightarrow \neg\neg p)$ und A aus Folgerung 1.5 sind Tautologien.
- 2 $(p \wedge (\neg p))$ ist widerspruchsvoll.
- 3 $(p \wedge q)$ ist erfüllbar aber weder Tautologie noch Widerspruch.
- 4 Sei $\Sigma = \{p\}$ und $A = p \vee q$. Dann gilt $\Sigma \models A$.
Intuitiv klar: Annahme p ist eine stärkere Aussage als $p \vee q$.
Formal betrachte eine Bewertung φ .
Falls $\varphi(p) = 1$, dann auch $\varphi(p \vee q) = 1$.
Jede Bewertung, die Σ erfüllt, erfüllt auch A .

Folgerungen

Lemma 1.8

- (a) A allgemeingültig gdw $\neg A$ widerspruchsvoll.
- (b) Es gilt $\emptyset \models A$ genau dann, wenn A Tautologie ist: $\text{Folg}(\emptyset) = \text{TAUT}$.
- (c) Ist Σ nicht erfüllbar, dann gilt $\Sigma \models A$ für alle $A \in F$: $\text{Folg}(\Sigma) = F$.
Insbesondere $\Sigma \models A$ und $\Sigma \models \neg A$ für ein $A \in F$.
- (d) Sei $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Ist Σ' erfüllbar, dann ist auch Σ erfüllbar.
- (e) Es gilt $\Sigma \subseteq \text{Folg}(\Sigma)$ und $\text{Folg}(\text{Folg}(\Sigma)) = \text{Folg}(\Sigma)$.
- (f) Falls $\Sigma \subseteq \Sigma'$, dann gilt $\text{Folg}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}(\Sigma')$.
- (g) $\Sigma \models A$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (h) Ist Σ endlich, dann ist es entscheidbar, ob Σ erfüllbar ist.
Die Menge $\text{Folg}(\Sigma)$ ist entscheidbar.
- (i) Die Mengen TAUT , SAT sind entscheidbar.

Deduktionstheorem und Modus-Ponens Regel

Lemma 1.9

a) **Deduktionstheorem** (*semantische Version*):

$$\Sigma, A \models B \quad \text{gdw} \quad \Sigma \models (A \rightarrow B).$$

(Σ, A ist Kurzschreibweise für $\Sigma \cup \{A\}$)

b) **Modus-Ponens-Regel**: *Es gilt*

$$\{A, A \rightarrow B\} \models B.$$

Insbesondere ist B Tautologie, falls A und $(A \rightarrow B)$ Tautologien.

Beweis: Tafel.

Kompaktheitssatz der Aussagenlogik

Satz 1.10 (Kompaktheitssatz, Beweis nach Lindenbaum)

- a) $\Sigma \subseteq F$ ist erfüllbar genau dann,
wenn jede **endliche** Teilmenge von Σ erfüllbar ist.
- b) $\Sigma \subseteq F$ ist unerfüllbar genau dann,
wenn es eine unerfüllbare **endliche** Teilmenge von Σ gibt.

Beweis: Tafel.

- Teil b) des Satzes ist Grundlage für Beweisverfahren für $\Sigma \models A$. Dies ist der Fall, wenn $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.
- Widerspruchsbeweiser versuchen systematisch eine **endliche** Menge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ zu finden, so dass $\Sigma_0 \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar ist.

Korollar 1.11

Es gilt $\Sigma \models A$ gdw. es eine **endliche** Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \models A$.

Beispiel 1.12

Sei $\Sigma \subseteq F$. Gibt es zu jeder Bewertung φ ein $A \in \Sigma$ mit $\varphi(A) = 1$, so gibt es $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ mit $n > 0$, so dass $\models A_1 \vee \dots \vee A_n$.

Betrachte die Menge $\Sigma' = \{\neg A \in F \mid A \in \Sigma\}$.

Nach Voraussetzung ist sie unerfüllbar.

Also gibt es endliche nichtleere Teilmenge $\{\neg A_1, \dots, \neg A_n\}$ von Σ' , die unerfüllbar ist.

Also gibt es für jede Bewertung φ ein i mit $\varphi(\neg A_i) = 0$.

Also $\varphi(A_i) = 1$ und somit $\varphi(A_1 \vee \dots \vee A_n) = 1$.

Logische Äquivalenz

Definition 1.13 (Logische Äquivalenz)

Formeln $A, B \in F$ heißen **logisch äquivalent**, $A \models B$, falls
für jede Bewertung φ gilt: $\varphi(A) = \varphi(B)$.

Wichtige Äquivalenzen:

(Involution) $A \models \neg(\neg A)$

(Idempotenz) $A \models A \wedge A$

$$A \models A \vee A$$

(Kommutativität) $A \wedge B \models B \wedge A$

$$A \vee B \models B \vee A$$

(Assoziativität) $A \wedge (B \wedge C) \models (A \wedge B) \wedge C$

$$A \vee (B \vee C) \models (A \vee B) \vee C$$

(Distributivität) $A \wedge (B \vee C) \models (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$$A \vee (B \wedge C) \models (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

Logische Äquivalenz (Fort.)

$$\begin{array}{ll} \text{(De Morgan)} & \neg(A \wedge B) \models \neg A \vee \neg B & \neg(A \vee B) \models \neg A \wedge \neg B \\ & A \rightarrow B \models \neg A \vee B & A \leftrightarrow B \models (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \\ & A \wedge B \models \neg(A \rightarrow \neg B) & A \vee B \models \neg A \rightarrow B \end{array}$$

Lemma 1.14

Logische Äquivalenz $\models \subseteq F \times F$ ist eine *Äquivalenzrelation*, also reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Es ist sogar eine *Kongruenz*:

ersetzt man in einer Formel A eine Teilformel B durch $C \models B$, so erhält man $A' \models A$.

Logische Äquivalenz (Fort.)

Lemma 1.15

Folgende Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{array}{ll} \models A \leftrightarrow B & A \models B \\ A \models B \text{ und } B \models A & \text{Folg}(A) = \text{Folg}(B) \end{array}$$

Die Beweise sind gute Übungen für die Klausur.

Lemma 1.16

Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es $B, C, D \in F$ mit

- 1 $A \models B$, B enthält nur \rightarrow und \neg als Verknüpfungen
- 2 $A \models C$, C enthält nur \wedge und \neg als Verknüpfungen
- 3 $A \models D$, D enthält nur \vee und \neg als Verknüpfungen

Nutze strukturelle Induktion über den Aufbau von Formeln.

Logische Äquivalenz (Fort.)

Definition 1.17 (Vollständige Operatorenmenngen)

Eine Operatorenmenge $OP \subseteq \{\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ heißt **vollständig**, falls es zu jedem $A \in F$ ein $B \in F(OP)$ gibt mit $A \models B$.

Dabei ist $F(OP)$ die Menge der Formeln mit Verknüpfungen in OP .

Sei $false$ eine Konstante (0-stelliger Junktor) mit $\varphi(false) = 0$ für jede Bewertung φ .

Satz 1.18

Die Mengen $\{\neg, \rightarrow\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee, \wedge\}$, $\{false, \rightarrow\}$ sind vollständig.

Nutze Lemma 1.16 und $\neg A \models (A \rightarrow false)$.

Deduktiver Aufbau der Aussagenlogik

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einem axiomatischen Aufbau der Aussagenlogik mittels eines **Deduktiven Systems** oder **Kalküls**.

Eine syntaktisch korrekte Formel in einem Deduktiven System wird **Theorem** genannt, wenn sie durch rein mechanische Anwendungen der Regeln des Systems aus den Axiomen des Systems **abgeleitet** werden kann.

Man kann deduktive Systeme angeben, in denen aussagenlogische Formeln genau dann Theoreme sind, wenn sie auch Tautologien sind.

Definition 2.1 (Deduktives System)

Ein **Deduktives System** $\mathcal{F}(Ax, R)$ besteht aus

- einem Alphabet Δ ,
- einer Menge von Formeln $F \subseteq \Delta^*$,
- einer Menge von **Axiomen** $Ax \subseteq F$ und
- einer Menge R von **Regeln** der Form $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$ mit $n > 0$ und $A_1, \dots, A_n, A \in F$.

Die Mengen F , Ax und R sind typischerweise **entscheidbar**.

Deduktive Systeme (Fort.)

Definition 2.2

Die Menge $T = T(\mathcal{F})$ der **Theoreme** ist induktiv definiert durch:

- 1 $A_x \subseteq T$ alle Axiome sind Theoreme
- 2 Sind $A_1, \dots, A_n \in T$ und ist $\frac{A_1, \dots, A_n}{A}$ in R , dann ist $A \in T$.

Schreibe $A \in T(\mathcal{F})$ als $\vdash_{\mathcal{F}} A$ oder $\vdash A$ und sage **A ist in \mathcal{F} herleitbar**.

Definition 2.3 (Deduktiver Folgebegriff)

Sei $\Sigma \subseteq F$, $A \in F$. Dann ist **A in \mathcal{F} aus Σ herleitbar**, kurz $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}(A_x, R)} A$, falls $\vdash_{\mathcal{F}(A_x \cup \Sigma, R)} A$ gilt.

Die Menge der **Folgerungen aus Σ in \mathcal{F}** ist

$$\text{Fol}_{\mathcal{F}}(\Sigma) := \{A \in F \mid \Sigma \vdash_{\mathcal{F}(A_x, R)} A\}.$$

Σ heißt **konsistent**, falls für keine Formel $A \in F$ gilt: $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$.
Gibt es eine solche Formel, so heißt Σ **inkonsistent**.

Beweise

Bemerkung 2.4

Formel A ist in \mathcal{F} herleitbar, falls es eine endliche Folge von Formeln B_1, \dots, B_n gibt mit $A \equiv B_n$ und für $1 \leq i \leq n$ gilt:

$$B_i \in Ax \text{ oder es gibt } i_1, \dots, i_l < i \text{ und } \frac{B_{i_1} \dots B_{i_l}}{B_i} \in R.$$

Folge B_1, \dots, B_n heißt auch **Beweis** für A in \mathcal{F} .

Eine endliche Folge B_1, \dots, B_n heißt **abgekürzter Beweis** für $\Sigma \vdash B_n$, falls für $1 \leq j \leq n$ gilt:

$$\Sigma \vdash B_j \text{ oder es gibt } j_1, \dots, j_r < j \text{ mit } B_{j_1}, \dots, B_{j_r} \vdash B_j.$$

Lemma 2.5

- 1 $\vdash A$ gilt gdw. es einen Beweis für A gibt.
- 2 Es gibt einen Beweis für $\Sigma \vdash A$ gdw. es einen abgekürzten Beweis für $\Sigma \vdash A$ gibt.

Bemerkung 2.6

- *Eigenschaften der Elemente von T werden durch strukturelle Induktion bewiesen.*
- *Die Menge der Beweise*

$$\text{Bew} := \{B_1, \dots, B_n \in F^+ \mid B_1, \dots, B_n \text{ ist Beweis}\}$$

ist entscheidbar.

- *Mit der vorherigen Bemerkung ist die Menge T der Theoreme rekursiv aufzählbar.*
- *Ist Σ entscheidbar, dann gelten die Aussagen entsprechend. Insbesondere ist $\text{Fol}_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ aufzählbar.*

Bemerkung (Fort.)

Lemma 2.7

- Gilt $\Sigma \vdash A$, so folgt aus der Definition des Ableitungsbegriffs, dass es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ gibt mit $\Sigma_0 \vdash A$.
(Dies entspricht dem Kompaktheitssatz für \models .)
- Ist Σ inkonsistent, dann gibt es eine endliche Teilmenge $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, die inkonsistent ist.
- Ist $\Sigma \subseteq \Gamma$, dann gilt $\text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Gamma)$.
- Aus $\Sigma \vdash A$ und $\Gamma \vdash B$ für alle $B \in \Sigma$ folgt $\Gamma \vdash A$.
Ist also $\Sigma \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Gamma)$, dann gilt $\text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Sigma) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Gamma)$.
(Beweise lassen sich also zusammensetzen.)
- Gilt $\Sigma \vdash A$, so ist $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent.
(Gilt auch die Umkehrung?)
- Es gilt $T(\mathcal{F}) \subseteq \text{Folg}_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ für jede Menge Σ .

Schemata

Gibt es ein deduktives System \mathcal{F}_0 , so dass

$$\vdash_{\mathcal{F}_0} A \quad \text{gdw.} \quad \models A?$$

Hierzu werden Ax und R häufig **endlich** beschrieben durch **Schemata**.
Beispielsweise beschreibt das Schema $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ die Menge

$$\{A_0 \rightarrow (B_0 \rightarrow A_0) \mid A_0, B_0 \in F\}.$$

Das Schema $\frac{A, A \rightarrow B}{B}$ beschreibt die Menge von Regeln

$$\left\{ \frac{A_0, A_0 \rightarrow B_0}{B_0} \mid A_0, B_0 \in F \right\}.$$

Das deduktive System \mathcal{F}_0

Eingeführt von Stephen Cole Kleene (1909 — 1994).

Definition 2.8 (Das deduktive System \mathcal{F}_0)

Das deduktive System \mathcal{F}_0 für die Aussagenlogik besteht aus der Formelmenge $F_0 := F(\{\neg, \rightarrow\})$. Die Axiomenmenge Ax wird durch folgende Axiomenschemata beschrieben:

$$Ax1: A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$Ax2: (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$Ax3: (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

Die Regelmenge R wird beschrieben durch das Regelschema

$$MP: \frac{A, (A \rightarrow B)}{B} \quad (\text{modus ponens}).$$

Beispiel

Beispiel 2.9

Für jedes $A \in F_0$ gilt $\vdash (A \rightarrow A)$, also $(A \rightarrow A) \in T(\mathcal{F}_0)$

Beweis:

$B_0 \equiv (A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)) \rightarrow$	
$((A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A))$	Ax2
$B_1 \equiv A \rightarrow ((A \rightarrow A) \rightarrow A)$	Ax1
$B_2 \equiv (A \rightarrow (A \rightarrow A)) \rightarrow (A \rightarrow A)$	MP(B_0, B_1)
$B_3 \equiv A \rightarrow (A \rightarrow A)$	Ax1
$B_4 \equiv A \rightarrow A$	MP(B_2, B_3)

Bemerkung zum deduktiven System \mathcal{F}_0

- $Ax1$, $Ax2$ und $Ax3$ beschreiben disjunkte Formelmengen.
- Ax und R sind entscheidbar.
- Alle Axiome sind Tautologien.

Da diese abgeschlossen sind unter Modus Ponens, sind alle Theoreme Tautologien: $T(\mathcal{F}_0) \subseteq Taut(\mathcal{F}_0)$.

- Die Modus-Ponens-Regel ist **nicht** eindeutig:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B} \quad \text{und} \quad \frac{A', A' \rightarrow B}{B}$$

haben die gleiche Folgerung.

Das **erschwert das Finden von Beweisen**.

- Es genügt, nur Axiome für Formeln in \rightarrow und \neg zu betrachten. Andere Formeln sind zu einer solchen Formel logisch äquivalent.

Will man in ganz \mathcal{F} Beweise führen, braucht man weitere Axiome, zum Beispiel:

$$Ax1 \wedge : (A \wedge B) \rightarrow \neg(A \rightarrow \neg B) \quad Ax2 \wedge : \neg(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \wedge B)$$

Deduktionstheorem

Wie findet man Beweise im System \mathcal{F}_0 ?

Einziger Hinweis: sofern Zielformel B kein Axiom ist, muss sie in der Form $(A_1 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow B) \dots)$ vorkommen. Wähle geeignete A .

Hilfreich:

Satz 2.10 (Deduktionstheorem (syntaktische Version))

Seien $\Sigma \subseteq F_0$ und $A, B \in F_0$. Dann gilt

$$\Sigma, A \vdash B \quad \text{gdw.} \quad \Sigma \vdash (A \rightarrow B).$$

Anwendungen des Deduktionstheorems

Beispiel 2.11

Um $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$ zu zeigen, genügt es, $\neg\neg A \vdash A$ zu zeigen.

Beweis:

$B_1 \equiv \neg\neg A$	
$B_2 \equiv \neg\neg A \rightarrow (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A)$	Ax1
$B_3 \equiv \neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A$	MP
$B_4 \equiv (\neg\neg\neg\neg A \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A)$	Ax3
$B_5 \equiv \neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A$	MP
$B_6 \equiv (\neg A \rightarrow \neg\neg\neg\neg A) \rightarrow (\neg\neg A \rightarrow A)$	Ax3
$B_7 \equiv \neg\neg A \rightarrow A$	MP
$B_8 \equiv A$	MP

Anwendungen des Deduktionstheorems (Fort.)

Lemma 2.12

- Die folgenden Theoreme gelten in \mathcal{F}_0 :

$$\text{(Transitivitat der Implikation)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C)) \quad (1)$$

$$\text{(Folgerung aus Inkonsistenz)} \quad \vdash \neg B \rightarrow (B \rightarrow A) \quad (2)$$

$$\text{(Doppelnegation)} \quad \vdash B \rightarrow \neg\neg B \quad (3)$$

$$\text{(Kontraposition)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad (4)$$

$$\text{(Implikation)} \quad \vdash B \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg(B \rightarrow C)) \quad (5)$$

$$\text{(Hilfslemma 1)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow (A \rightarrow \neg Ax)) \quad (E1)$$

$$\text{(Hilfslemma 2)} \quad \vdash (A \rightarrow \neg Ax) \rightarrow \neg A \quad (E2)$$

$$\text{(Negation aus Inkonsistenz)} \quad \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A) \quad (6)$$

$$\text{(Eliminierung von Annahmen)} \quad \vdash (B \rightarrow A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow A) \quad (7)$$

- Es gilt $\Sigma \vdash A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent ist.

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{F}_0

Frage: Lassen sich alle Tautologien als Theoreme in System \mathcal{F}_0 herleiten?

Satz 2.13 (Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{F}_0)

Sei $A \in F_0$ eine Formel der Aussagenlogik.

- a) **Korrektheit:** Aus $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$ folgt $\models A$, es können nur Tautologien als Theoreme in \mathcal{F}_0 hergeleitet werden.
- b) **Vollständigkeit:** Aus $\models A$ folgt $\vdash_{\mathcal{F}_0} A$, alle Tautologien lassen sich in \mathcal{F}_0 herleiten.

Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{F}_0 (Fort.)

Als Hilfsmittel dient:

Lemma 2.14

Betrachte $A(p_1, \dots, p_n) \in F_0$ mit $n > 0$. Sei φ eine Bewertung. Mit

$$P_i := \begin{cases} p_i, & \text{falls } \varphi(p_i) = 1 \\ \neg p_i, & \text{falls } \varphi(p_i) = 0 \end{cases} \quad A' := \begin{cases} A, & \text{falls } \varphi(A) = 1 \\ \neg A, & \text{falls } \varphi(A) = 0 \end{cases}$$

gilt $P_1, \dots, P_n \vdash A'$.

Folgerung 2.15

Sei $\Sigma \subseteq F_0, A \in F_0$.

- $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ gilt genau dann, wenn $\Sigma \models A$ gilt.
- Σ ist genau dann konsistent, wenn Σ erfüllbar ist.
- Ist Σ endlich und $A \in F_0$, dann ist $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$ entscheidbar.

Beweis der Folgerung

Beweis:

$$\Sigma \vdash_{\mathcal{F}_0} A$$

$$\stackrel{2.7}{\iff} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \dots, A_n \vdash_{\mathcal{F}_0} A$$

$$\begin{array}{l} \text{D.T.} \\ \iff \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\ \quad \vdash_{\mathcal{F}_0} (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \stackrel{2.13}{\iff} \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit} \\ \quad \models (A_1 \rightarrow (A_2 \rightarrow \dots (A_n \rightarrow A) \dots)) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{D.T.} \\ \iff \text{Es gibt } A_1, \dots, A_n \in \Sigma \text{ mit } A_1, \dots, A_n \models A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{K.S.} \\ \iff \Sigma \models A \end{array}$$

Beweis der Folgerung (Fort.)

Beweis:

Σ ist konsistent

\iff Es gibt kein A mit $\Sigma \vdash A$ und $\Sigma \vdash \neg A$

\iff Es gibt kein A mit $\Sigma \models A$ und $\Sigma \models \neg A$

\iff Σ ist erfüllbar (Lemma 1.8(c)).



Sequenzenkalkül

Es gibt weitere korrekte und vollständige deduktive Systeme.
Das folgende System geht auf [Gerhard Gentzen \(1909 — 1945\)](#) zurück.
Es ist besonders zur Automatisierung von Beweisen geeignet.

Definition 2.16 (Gentzen-Sequenzenkalkül)

Seien $\Gamma, \Delta \subseteq F$ endliche Mengen von Formeln. Eine **Sequenz** ist eine Zeichenreihe der Form $\Gamma \vdash_G \Delta$.

Semantische Interpretation von Sequenzen: Für jede Bewertung φ gibt es eine Formel $A \in \Gamma$ mit $\varphi(A) = 0$ oder es gibt $B \in \Delta$ mit $\varphi(B) = 1$.

Sind $\Gamma = \{A_1, \dots, A_n\}$ und $\Delta = \{B_1, \dots, B_m\}$, dann entspricht die Sequenz $\Gamma \vdash_G \Delta$ der Formel

$$(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow (B_1 \vee \dots \vee B_m).$$

Sequenzenkalkül (Fort.)

Definition 2.16 (Gentzen-Sequenzenkalkül (Fort.))

Der Kalkül für Objekte der Form $\Gamma \vdash_G \Delta$ wird definiert durch die Axiome:

$$(Ax1) \Gamma, A \vdash_G A, \Delta \quad (Ax2) \Gamma, A, \neg A \vdash_G \Delta \quad (Ax3) \Gamma \vdash_G A, \neg A, \Delta$$

Die Regeln des Sequenzenkalküls sind wie folgt:

$$R_{\wedge, \vee}: \frac{\Gamma, A, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash_G \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash_G A, B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \vee B, \Delta}$$

$$R_{\rightarrow}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta, B}{\Gamma \vdash_G A \rightarrow B, \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash_G \Delta}$$

$$R_{\neg}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta}{\Gamma \vdash_G \neg A, \Delta} \quad \frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash_G \Delta}$$

$$R_{\wedge'}: \frac{\Gamma \vdash_G A, \Delta; \Gamma \vdash_G B, \Delta}{\Gamma \vdash_G A \wedge B, \Delta}$$

$$R_{\vee'}: \frac{\Gamma, A \vdash_G \Delta; \Gamma, B \vdash_G \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash_G \Delta}$$

Sequenzenkalkül (Fort.)

Eine Sequenz $\Gamma \vdash_G \Delta$ heißt **ableitbar**, falls es eine endliche Folge von Sequenzen $\Gamma_1 \vdash_G \Delta_1, \dots, \Gamma_r \vdash_G \Delta_r$ gibt mit $\Gamma_r \equiv \Gamma$, $\Delta_r \equiv \Delta$ und

Jedes $\Gamma_j \vdash_G \Delta_j$ mit $1 \leq j \leq r$ ist ein Axiom oder geht aus vorangehenden Folgigliedern aufgrund einer Regel hervor.

Satz 2.17

Der Sequenzenkalkül ist

korrekt: $\Gamma \vdash_G \Delta$ impliziert $\Gamma \models \Delta$

vollständig: $\Gamma \models \Delta$ impliziert $\Gamma \vdash_G \Delta$.

Dabei ist $\Gamma \models \Delta$ mit $\Delta \subseteq F$ endlich definiert als $\Gamma \models \bigvee_{B \in \Delta} B$.

Beispiel

Beweise im Sequenzenkalkül werden bottom-up konstruiert und baumartig notiert:

Beispiel 2.18

Es gilt $p \vee q, \neg p \vee r \vdash_G q \vee r$.

Beweis:

$q, \neg p \vee r \vdash q, r$ Ax1

$p, r \vdash q, r$ Ax1

$p, \neg p \vdash q, r$ Ax2

$p, \neg p \vee r \vdash q, r$ $R_{\vee'}$

$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q, r$ $R_{\vee'}$

$p \vee q, \neg p \vee r \vdash q \vee r$ R_{\vee}



Algorithmischer Aufbau der Aussagenlogik

Wir betrachten Verfahren, die bei gegebener endlicher Menge $\Sigma \subseteq F$ und $A \in F$ entscheiden, ob $\Sigma \models A$ gilt.

Die bisher betrachteten Verfahren prüfen **alle Belegungen** der in den Formeln vorkommenden Variablen oder zählen die Theoreme eines geeigneten deduktiven Systems auf. **Dies ist sehr aufwendig.**

Nutze **Erfüllbarkeitschecker**:

$$\Sigma \models A \quad \text{gdw.} \quad \Sigma \cup \{\neg A\} \text{ unerfüllbar.}$$

Die Komplexität von Erfüllbarkeit bleibt weiterhin groß: SAT ist NP-vollständig.

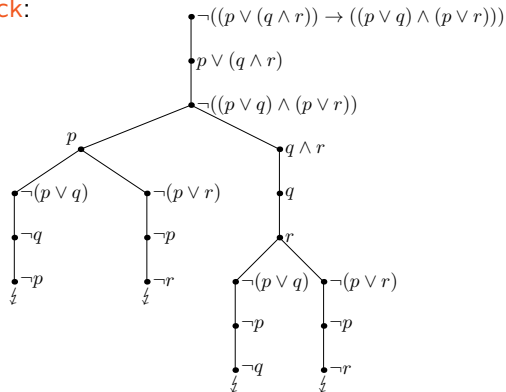
Suche nach Verfahren, die bei **üblichen Eingaben** schneller sind als die **Brute-Force-Methode**:

Semantische Tableaus Davis-Putnam Resolution.

Semantische Tableaus: Beispiel

Zeige, dass $\neg((p \vee (q \wedge r)) \rightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee r)))$ unerfüllbar ist.

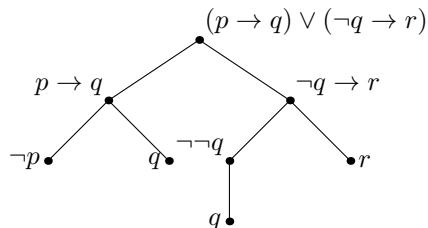
Erfüllbarkeitscheck:



Da alle Äste zu Widersprüchen führen, ist die Formel nicht erfüllbar.

Semantische Tableaus: Beispiel (Fort.)

Bestimme **alle Bewertungen**, die $A \equiv (p \rightarrow q) \vee (\neg q \rightarrow r)$ erfüllen:



Demnach ist $\{\varphi : F \rightarrow \mathbb{B} \mid \varphi(p) = 0 \text{ oder } \varphi(q) = 1 \text{ oder } \varphi(r) = 1\}$ die Menge aller Bewertungen, die A erfüllen.

An den Blättern lässt sich auch eine logisch äquivalente DNF ablesen, nämlich $\neg p \vee q \vee r$.

Intuition zu Tableaus

Die erfüllenden Bewertungen der Wurzelformel **sind** die Vereinigung der erfüllenden Bewertungen aller Äste.

- Für jede erfüllende Bewertung der Wurzel gibt es einen Ast in dem Tableau, so dass die Bewertung alle Formeln auf dem Ast erfüllt.
- Umgekehrt bestimmt jeder erfüllbare Ast erfüllende Bewertungen der Wurzelformel.

Trick: Sind Formeln maximal entfaltet (Tableau ist vollständig), sind erfüllende Bewertungen bzw. Widersprüche unmittelbar ersichtlich.

Definition von Tableaus

Zwei Arten von Formeln: β -Formeln führen zu Verzweigungen, α -Formeln führen nicht zu Verzweigungen:

- α -Formeln mit Komponenten α_1 und α_2 führen zu Folgeknoten mit Markierungen α_1 und α_2 :

α	$\neg\neg A$	$A_1 \wedge A_2$	$\neg(A_1 \vee A_2)$	$\neg(A_1 \rightarrow A_2)$
α_1	A	A_1	$\neg A_1$	A_1
α_2	(A)	A_2	$\neg A_2$	$\neg A_2$

- β -Formeln mit Komponenten β_1 und β_2 führen zu Verzweigungen mit Knotenmarkierungen β_1 und β_2 :

β	$\neg(A_1 \wedge A_2)$	$A_1 \vee A_2$	$A_1 \rightarrow A_2$
$\beta_1 \mid \beta_2$	$\neg A_1 \mid \neg A_2$	$A_1 \mid A_2$	$\neg A_1 \mid A_2$

Beachte: Jede Formel ist ein Literal (p oder $\neg p$ mit $p \in V$), eine α - oder eine β -Formel, und genau von einem dieser drei Typen.

Definition von Tableaus (Fort.)

Definition 3.1 (Tableau)

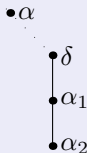
Tableaus sind binäre Bäume, deren Knoten mit Formeln aus F markiert sind. Die Menge der **Tableaus** T_A für $A \in F$ ist induktiv definiert durch:

(a) Es gilt $\tau_A \in T_A$, wobei τ_A einen mit A beschrifteten Knoten hat:

• A

(b) Ist $\tau \in T_A$ und δ Marke eines Blattes von τ , so lässt sich τ wie folgt zu einem Tableau $\tau' \in T_A$ fortsetzen:

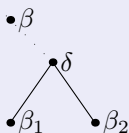
(α) Füge δ zwei aufeinander folgende Knoten hinzu, die mit α_1 und α_2 markiert sind, falls die α -Formel α auf dem Ast zu δ vorkommt:



Definition von Tableaus (Fort.)

Definition 3.1 (Tableau (Fort.))

(β) Füge in τ' als Nachfolger von δ zwei Knoten hinzu, die mit den Komponenten β_1 bzw. β_2 einer β -Formel β markiert sind, falls β auf dem Ast zu δ vorkommt:



Im Folgenden werden Äste in $\tau \in T_A$ mit ihrer Formelmengens $\Theta \subseteq F$ identifiziert.

Eigenschaften von Tableaus I: Semantik

Lemma 3.2

Sei $A \in F$ eine Formel und $\tau \in T_A$ ein Tableau für A . Dann gilt

A ist erfüllbar gdw. $\exists \text{ Ast } \Theta \in \tau : \Theta$ ist erfüllbar.

Das Lemma folgt aus einer stärkeren Aussage. Für jede Bewertung φ gilt:

φ erfüllt A gdw. $\exists \text{ Ast } \Theta \in \tau : \varphi$ erfüllt Θ .

Die erfüllenden Bewertungen der Äste sind also genau die erfüllenden Bewertungen der Wurzelformel.

Tableaus sind nicht eindeutig, aber Lemma 3.2 hat folgende Konsequenz: Entweder hat jedes Tableau $\tau \in T_A$ einen erfüllbaren Ast oder keines.

Vollständige und abgeschlossene Mengen und Tableaus

Der Begriff der Erfüllbarkeit von Ästen ist semantischer Natur.

Das Ziel von Tableaus ist, Erfüllbarkeit von Formeln **automatisch** zu prüfen.

Dazu muss Erfüllbarkeit **syntaktisch** charakterisiert werden.

Definition 3.3

- Eine Formelmenge $\Theta \subseteq F$ heißt **vollständig**, falls mit $\alpha \in \Theta$ auch $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \Theta$ und mit $\beta \in \Theta$ auch $\beta_1 \in \Theta$ oder $\beta_2 \in \Theta$.

Ein Tableau τ heißt **vollständig**, falls jeder Ast $\Theta \in \tau$ vollständig ist.

- Eine Formelmenge Θ heißt **abgeschlossen**, falls es eine Formel $B \in F$ gibt mit $\{B, \neg B\} \subseteq \Theta$. Sonst heißt die Menge **offen**.

Ein Tableau τ heißt **abgeschlossen**, wenn jeder Ast $\Theta \in \tau$ abgeschlossen ist.

Jedes Tableau kann zu einem vollständigen Tableau fortgesetzt werden.

Eigenschaften von Tableaus II: Syntax

Lemma 3.4 (Hintikka)

Sei $\Theta \subseteq F$ vollständig. Dann gilt: Θ ist erfüllbar gdw. Θ ist offen.

Abgeschlossene Mengen sind per Definition unerfüllbar.

Für die Rückrichtung sei Θ eine vollständige und offene Menge.

Definiere

$$\varphi(p) := \begin{cases} 0 & \neg p \in \Theta \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bewertung φ ist wohldefiniert.

Zeige mit Noetherscher Induktion nach der Länge der Formeln, dass $\varphi(A) = 1$ für alle $A \in \Theta$.

Satz 3.5

Eine Formel $A \in F$ ist *unerfüllbar* gdw. es ein *abgeschlossenes* Tableau $\tau \in T_A$ gibt.

Auch hier gilt: es gibt ein abgeschlossenes Tableau für A gdw. alle vollständigen Tableaus für A abgeschlossen sind.

Die Tableaumethode geht auf [Evert Willem Beth \(1908 – 1964\)](#) zurück.

Vollständige und offene Formelmengen sind Hintikka-Mengen, nach [Jaakko Hintikka \(1929 – 2015\)](#).

Das Lemma von Hintikka zeigt, dass sie erfüllbar sind.

Korrektheit und Vollständigkeit von Tableaus (Fort.)

Beweis (von Satz 3.5)

Sei A nicht erfüllbar.

Jedes Tableau kann zu einem vollständigen Tableau fortgesetzt werden.

Also gibt es zu A ein vollständiges Tableau $\tau \in T_A$.

Mit Lemma 3.2 sind alle Äste $\Theta \in \tau$ nicht erfüllbar.

Mit Lemma 3.4 sind alle Äste $\Theta \in \tau$ abgeschlossen.

Also gibt es ein abgeschlossenes Tableau $\tau \in T_A$.

Für die Rückrichtung sei $\tau \in T_A$ abgeschlossen.

Abgeschlossene Äste sind unerfüllbar.

Mit Lemma 3.2 ist Formel A unerfüllbar. ■

Tableaus für Formelmengen

Sei $\Sigma \subseteq F$ eine ggf. unendliche Formelmenge.

Die Menge T_Σ der **Tableaus für Σ** ist definiert wie zuvor, nur dass

- die Konstruktion mit einer Formel $A \in \Sigma$ beginnt und
- in jedem Schritt $\sigma \in \Sigma$ an ein Blatt δ angehängt werden darf.

Tableau $\tau \in T_\Sigma$ heißt **vollständig**, wenn zusätzlich zu den vorherigen Bedingungen jeder Ast $\Theta \in \tau$ die Menge Σ enthält, also $\Sigma \subseteq \Theta$.

Tableaus für Formelmengen (Fort.)

Lemma 3.6

Seien $\Sigma \subseteq F$ und $\tau \in T_\Sigma$ mit $\Sigma \subseteq \Theta$ für jeden Ast $\Theta \in \tau$. Dann gilt:

Σ ist erfüllbar gdw. \exists Ast $\Theta \in \tau : \Theta$ ist erfüllbar.

Satz 3.7

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq F$ ist unerfüllbar gdw. T_Σ ein abgeschlossenes Tableau enthält.

Der alte Beweis funktioniert noch immer, modulo folgender Änderungen:

Lemma 3.2 ist durch Lemma 3.6 zu ersetzen.

Für die Vollständigkeit ist folgendes Lemma notwendig.

Lemma 3.8

Für jede Formelmenge $\Sigma \subseteq F$ existiert ein vollständiges Tableau $\tau \in T_\Sigma$.

Systematische Tableaukonstruktion

Beweis von Lemma 3.8 Sei Σ unendlich. Es wird eine nicht-terminierende Methode angegeben, die eine Folge von Tableaus

$$\tau_0 \subseteq \tau_1 \subseteq \dots \quad \text{konstruiert mit} \quad \tau := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \tau_i \quad \text{vollständig.}$$

Da $\Sigma \subseteq F$, ist Σ abzählbar, also $\Sigma = \{A_0, A_1, \dots\}$.

Nutze eine FIFO-Worklist $WL := \emptyset$ zur Speicherung von Knoten.

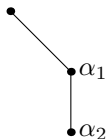
Nutze ferner einen Zähler $j := 0$, um Σ zu durchlaufen.

- $\tau_0 := \tau_{A_0}$. Ist A_0 kein Literal, push den Knoten von A_0 auf WL .
- τ_{n+1} entsteht aus τ_n wie folgt.

Falls $WL \neq \emptyset$, pop WL . Sei der Knoten mit $Y \in F$ beschriftet.

Systematische Tableaukonstruktion (Fort.)

- Ist Y eine α -Formel, erweitere jeden Ast, der durch den Knoten von Y geht, um die Teilformeln α_1 und α_2 :



Falls α_1 bzw. α_2 keine Literale sind, füge alle neuen mit α_1 bzw. α_2 beschrifteten Knoten der Worklist hinzu.

- Ist Y eine β -Formel, erweitere jeden Ast, der durch Y geht, um



Falls die Teilformeln β_1 , β_2 keine Literale sind, füge die entsprechenden Knoten der Worklist hinzu.

Systematische Tableaunkonstruktion (Fort.)

Falls $WL = \emptyset$, inkrementiere j und wähle $Y := A_j$.

- Hänge mit Y beschriftete Knoten an alle Äste an.
Sofern Y kein Literal ist, füge die Knoten der Worklist hinzu.

Systematische Tableaukonstruktion (Fort.)

Behauptung: τ ist vollständig.

Genauer: Jeder Ast $\Theta \in \tau$ ist vollständig und enthält Σ .

Beweis (Skizze):

Sei $\alpha \in \Theta$ eine α -Formel.

Dann ist sie bei der Erstellung in die Worklist aufgenommen worden.

Wegen der FIFO-Reihenfolge, wurde sie irgendwann bearbeitet.

Also sind $\{\alpha_1, \alpha_2\} \subseteq \Theta$.

Betrachte $A_j \in \Sigma$.

Irgendwann ist $j = i$ geworden.

Angenommen, das wäre nicht der Fall.

Dann gab es einen Index, bei dem die Worklist nie geleert wurde.

Das muss falsch sein.

Mit der Entnahme einer Formel $A \in F$ sind zwar endlich viele Formeln der Worklist hinzugefügt worden, die waren aber alle kleiner.

Übung: Warum folgt Terminierung?

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit

Um aus der systematischen Tableaunkonstruktion Semi-Entscheidbarkeit für Unerfüllbarkeit abzuleiten, passe das Verfahren wie folgt an:

Füge keine Knoten an abgeschlossene Äste an.

Lemma 3.9

- (1) Die systematische Tableaunkonstruktion terminiert für $\Sigma \subseteq F$ endlich.*
- (2) Sei $\Sigma \subseteq F$ unendlich und nicht erfüllbar. Dann terminiert die modifizierte Tableaunkonstruktion mit einem abgeschlossenen Tableau.*

Beachte: Der **Kompaktheitssatz** folgt aus der zweiten Aussage.
Ist Σ nicht erfüllbar, enthält T_Σ ein endliches, abgeschlossenes Tableau.
Also ist eine endliche Teilmenge von Σ nicht erfüllbar.

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (Fort.)

Lemma 3.10 (König)

*Sei T ein unendlicher Baum mit endlichem Ausgangsgrad.
Dann gibt es einen unendlichen Pfad in T .*

Zeige Lemma 3.9(2):

Im Fall der Terminierung ist das resultierende Tableau abgeschlossen.
Abgeschlossenheit ist nämlich die einzige Bedingung zur Terminierung.

Es bleibt Terminierung zu zeigen.

Angenommen das modifizierte Verfahren terminiert nicht.

Dann wird ein unendliches Tableau τ konstruiert.

Da das Tableau endlichen Ausgangsgrad hat, gibt es mit Königs Lemma einen unendlichen Pfad $\Theta \in \tau$.

Wie in Lemma 3.8 enthält der Pfad Σ , ist vollständig und offen.

Mit Hintikkas Lemma ist Θ erfüllbar.

Damit ist auch Σ erfüllbar. Widerspruch.

Entscheidbarkeit und Semi-Entscheidbarkeit (Fort.)

Bemerkung 3.11

- *Das Tableauverfahren ist ein Semi-Entscheidungsverfahren für Unerfüllbarkeit abzählbarer Formelmengen $\Sigma \subseteq F$.*
- *Das Tableauverfahren ist eine Entscheidungsverfahren für Erfüllbarkeit endlicher Formelmengen $\Sigma \subseteq F$.*

Für die Entscheidbarkeit ist zu beachten, dass bei einer abzählbaren Menge das Hinzufügen einer Formel $A_i \in \Sigma$ zu einem Tableau **effektiv** ist. Ebenso ist der Test auf Abgeschlossenheit **entscheidbar**.

Normalformen

Vorteile:

Die einfachere Gestalt der Normalform lässt **spezielle Algorithmen** zur Lösung bestimmter Fragestellungen zu.

Die Transformation sollte **nicht zu teuer** sein, sonst würde sich der Aufwand nicht lohnen.

Beispiele:

- Aus einer DNF lassen sich alle erfüllenden Belegungen direkt ablesen.
- Aus einer minimalen DNF lassen sich Schaltnetze herleiten.
- Die systematische Tableau-Konstruktion erlaubt es, diese Normalformen aus einem vollständigen Tableau abzulesen.

Normalformen (Fort.)

Transformiert werden kann in eine

- **logisch äquivalente** Formel: $A \models T(A)$
- **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel: A erfüllbar gdw. $T(A)$ erfüllbar

Wir behandeln drei dieser Normalformen:

- **Negationsnormalform (NNF)** Form in \neg, \vee, \wedge
- **Konjunktive Normalform (KNF)** Form in \neg, \vee, \wedge
- **Disjunktive Normalform (DNF)** Form in \neg, \vee, \wedge

Negationsnormalform

Formel $A \in F$ ist in **Negationsnormalform (NNF)**, falls jede Negation direkt vor einer Variablen steht und keine zwei Negation einander folgen.

Definition 3.12 (NNF)

Die Menge der Formeln in **NNF** ist induktiv definiert durch

- Für $p \in V$ sind p und $\neg p$ in NNF.
- Sind A, B in NNF, dann sind auch $(A \vee B)$ und $(A \wedge B)$ in NNF.

Lemma 3.13

Zu jeder Formel $A \in F(\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\})$ gibt es $B \in F(\neg, \vee, \wedge)$ in NNF mit $A \models B$ und $|B| \in O(|A|)$.

Konjunktive Normalform

Definition 3.14 (Klausel)

Eine Formel $A \equiv (L_1 \vee \dots \vee L_n)$ mit Literalen L_1, \dots, L_n heißt **Klausel**.

- Sind alle Literale **negativ**, so ist es eine **negative** Klausel.

Sind alle Literale **positiv**, so ist es eine **positive** Klausel.

Klauseln, die **maximal ein positives Literal** enthalten, heißen **Horn-Klauseln**, nach **Alfred Horn (1918 – 2001)**.

- A wird **k -Klausel** genannt, falls A maximal $k \in \mathbb{N}$ Literale enthält.
1-Klauseln werden auch **Unit-Klauseln** genannt.

Eine Formel $A \equiv (A_1 \wedge \dots \wedge A_m)$ ist in **KNF**, falls A eine Konjunktion von Klauseln A_1, \dots, A_m ist.

- Handelt es sich um k -Klauseln, so ist A in **k -KNF**.

Konjunktive Normalform (Fort.)

Beispiel 3.15

$A \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$ ist in 2-KNF.

Betrachtet man Klauseln als Mengen von Literalen, lassen sich Formeln in KNF als Mengen von Literalismengen darstellen. Am Beispiel A :

$$\{\{p, q\}, \{p, \neg q\}, \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg q\}\}.$$

Lemma 3.16

Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es B in KNF mit $A \models B$ und $|B| \in O(2^{|A|})$.

Die Schranke ist **strikt**:

Es gibt eine Folge von Formeln $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $|A_n| = 2n$, für die **jede** logisch äquivalente Formel B_n in KNF mindestens die Länge 2^n besitzt.

Tseitin-Transformation

Eine kompaktere Formel in konjunktiver Normalform erhält man, wenn man **logische Äquivalenz aufgibt**.

Satz 3.17 (Tseitin 1970)

*Zu jeder Formel $A \in F$ gibt es eine **erfüllbarkeitsäquivalente** Formel B in KNF mit $|B| \in O(|A|)$.*

Idee:

Betrachte die gegebene Formel A als Syntaxbaum.

Teilformeln sind Teilbäume des Syntaxbaums.

Repräsentiere Teilbäume durch Pfade $n \in \{l, r\}^*$ zu deren Wurzel.

Führe für jeden Teilbaum n eine Hilfsvariablen a_n ein.

Die Hilfsvariable wird den Wahrheitswert der Teilformel erhalten.

Schränke a_n dazu mit Formeln in konjunktiver Normalform ein.

Tseitin-Transformation (Fort.)

Definition 3.18 (Tseitin)

Wir definieren die Funktion $ts : \{l, r\}^* \rightarrow F \rightarrow F$ über

$$ts_n(A \oplus B) := (a_n \leftrightarrow (a_{n.l} \oplus a_{n.r})) \wedge ts_{n.l}(A) \wedge ts_{n.r}(B)$$

$$ts_n(\neg A) := (a_n \leftrightarrow \neg a_{n.l}) \wedge ts_{n.l}(A)$$

$$ts_n(p) := (a_n \leftrightarrow p),$$

wobei $\oplus \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ und die Hilfsvariablen a_n **nicht** in der gegebenen Formel vorkommen.

Die Formel $ts_n(A)$ ist fast in KNF.

Die verbleibenden Äquivalenzen umfassen höchstens drei Variablen.

Sie können in konstanter Zeit in konstant große KNF umgewandelt werden.

Tseitin-Transformation (Fort.)

Bemerkung:

Formel B aus Satz 3.17 entsteht aus

$$ts_\varepsilon(A) \wedge a_\varepsilon$$

mit Elimination der Äquivalenzen.

Die Formel ist **nicht** logisch äquivalent wegen der Hilfsvariablen.

Die Formel ist nur **linear** groß, da es nur linear viele Teilformeln gibt, nämlich eine pro Operator und Variablenvorkommen.

Tseitin-Transformation (Fort.)

Als **Beispiel** betrachte $p \rightarrow q$. Es gilt

$$ts_\varepsilon(p \rightarrow q) = (a_\varepsilon \leftrightarrow (a_l \rightarrow a_r)) \wedge (a_l \leftrightarrow p) \wedge (a_r \leftrightarrow q).$$

Zur Umwandlung der Äquivalenzen in KNF, betrachte

$$\begin{aligned}(a_\varepsilon \leftrightarrow (a_l \rightarrow a_r)) &\models (a_\varepsilon \rightarrow (a_l \rightarrow a_r)) \wedge ((a_l \rightarrow a_r) \rightarrow a_\varepsilon) \\ &\models (\neg a_\varepsilon \vee \neg a_l \vee a_r) \wedge (a_\varepsilon \vee a_l) \wedge (a_\varepsilon \vee \neg a_r).\end{aligned}$$

Nach Auflösung aller Äquivalenzen erhält man folgende Formel in KNF, die **erfüllbarkeitsäquivalent** zu $p \rightarrow q$ ist:

$$\begin{aligned}&(\neg a_\varepsilon \vee \neg a_l \vee a_r) \wedge (a_\varepsilon \vee a_l) \wedge (a_\varepsilon \vee \neg a_r) \\ &\wedge (\neg a_l \vee p) \wedge (\neg p \vee a_l) \\ &\wedge (\neg a_r \vee q) \wedge (\neg q \vee a_r) \\ &\wedge a_\varepsilon.\end{aligned}$$

Tseitin-Transformation (Fort.)

Als **Beispiel** betrachte die Formel $A \equiv ((p \vee q) \wedge r) \rightarrow (\neg s)$.

Die Rekursion umfasst folgende Aufrufe:

$$ts_\varepsilon(A) = (a_\varepsilon \leftrightarrow (a_l \rightarrow a_r)) \wedge ts_l((p \vee q) \wedge r) \wedge ts_r(\neg s)$$

$$ts_l((p \vee q) \wedge r) = (a_l \leftrightarrow (a_{l,l} \wedge a_{l,r})) \wedge ts_{l,l}(p \vee q) \wedge ts_{l,r}(r)$$

$$ts_{l,l}(p \vee q) = (a_{l,l} \leftrightarrow (a_{l,l,l} \vee a_{l,l,r})) \wedge ts_{l,l,l}(p) \wedge ts_{l,l,r}(q)$$

$$ts_{l,l,l}(p) = (a_{l,l,l} \leftrightarrow p)$$

$$ts_{l,l,r}(q) = (a_{l,l,r} \leftrightarrow q)$$

$$ts_r(\neg s) = (a_r \leftrightarrow \neg a_{r,l}) \wedge ts_{r,l}(s)$$

$$ts_{r,l}(s) = (a_{r,l} \leftrightarrow s).$$

Disjunktive Normalform (Fort.)

Definition 3.19 (DNF)

Eine Formel $A \in F$ ist in **disjunktiver Normalform (DNF)**, falls A eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist:

$$A \equiv (A_1 \vee \dots \vee A_m) \quad \text{mit} \quad A_i \equiv (L_1^i \wedge \dots \wedge L_{n_i}^i).$$

Definition 3.20 (Duale Formel)

Die **duale Formel** $d(A)$ einer Formel $A \in F$ ist definiert durch:

$$\begin{aligned}d(p) &\equiv p \quad \text{für } p \in V \\d(\neg A) &\equiv \neg d(A) \\d(B \vee C) &\equiv d(B) \wedge d(C) \\d(B \wedge C) &\equiv d(B) \vee d(C).\end{aligned}$$

Zusammenhänge zwischen den Normalformen

Lemma 3.21

Für jede Formel $A \in F$ gilt:

- (1) Ist A in KNF, dann ist $NNF(\neg A)$ in DNF.
- (2) Ist A in KNF, so ist $d(A)$ in DNF und umgekehrt.

Lemma 3.22

Für jede Formel $A \in F$ gilt:

- (1) Setzt man $\psi(p) := 1 - \varphi(p)$, so gilt $\psi(d(A)) = 1 - \varphi(A)$.
- (2) A ist Tautologie gdw. $d(A)$ ein Widerspruch ist.
- (3) A ist erfüllbar gdw. $d(A)$ keine Tautologie ist.

Boolsche Funktionen

Bemerkung

Jede Formel $A(p_1, \dots, p_n)$ induziert die Boolsche Funktion $f_A : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ mit der Definition

$$f_A(b_1, \dots, b_n) := \varphi_{\overline{b}}(A),$$

wobei $\varphi_{\overline{b}}(p_i) := b_i$.

Umgekehrt gibt es für jede Boolsche Funktion $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ eine Formel $A(p_1, \dots, p_n)$, so dass $f = f_A$.

Kommentar

Die Umkehrung erfordert, dass die Operatormenge vollständig ist.

Die Boolsche Algebra hat als Operatoren `true`, `false`, `not`, `or`, `and`.

Die Digitale Logik verwendet eher `nand`, `nor`.

Diese Gatter benötigen nur zwei Transistoren.

Boolsche Funktionen: Beispiel

Ein **Patienten-Monitoring-System** erhält über Sensoren Daten über den Zustand eines Patienten:

- A Temperatur außerhalb 36-39°C
- B Blutdruck außerhalb 80-160 mm
- C Pulsrate außerhalb 60-120 Schlägen pro Minute
- O Alarmaktivierung notwendig.

Ein Mediziner legt Anforderungen an das Monitoring-System fest, z.B. bei welchen Kombinationen der Werte ist eine Alarmaktivierung notwendig:

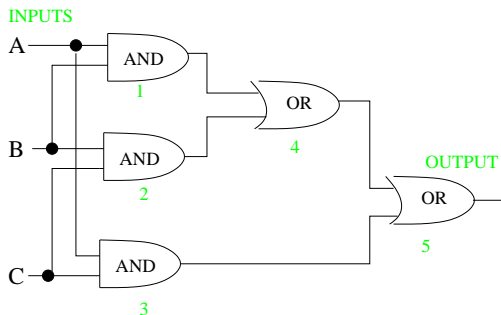
A	B	C	O
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Logischer Entwurf: Betrachte die Zeilen in denen *O* den Wert 1 hat und stelle eine DNF auf:

$$\begin{aligned} & (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee \\ & (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge C) \end{aligned}$$

Boolsche Funktionen: Beispiel (Fort.)

Als Realisierung des Monitoring-Systems könnte folgendes Schaltnetz dienen:



Das Schaltnetz, aufgefasst als Formel, ist eine minimierte und logisch äquivalente Variante der DNF.

Davis-Putnam-Algorithmen

Idee: Reduziere Erfüllbarkeit für eine Formel mit $n \in \mathbb{N}$ Variablen auf das Erfüllbarkeitsproblem für Formeln mit **maximal** $n - 1$ Variablen.

Ansatz: Suche einer erfüllenden Bewertung durch iterative Auswahl der Werte einzelner Variablen — **Bottom-Up-Verfahren**.

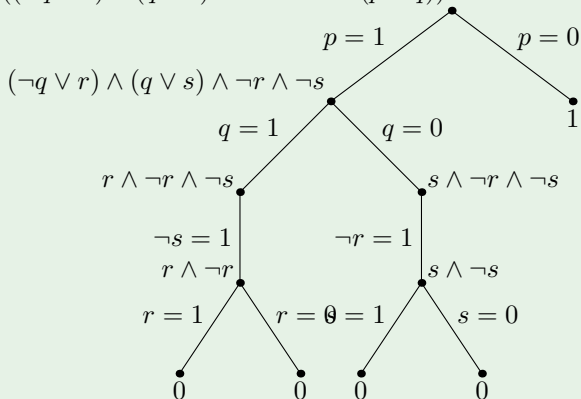
Algorithmen, die mit dieser Idee, Heuristiken und weiteren Verfeinerungen arbeiten, werden als **Davis-Putnam-Algorithmen** bezeichnet, nach **Martin Davis** (*1928) und **Hilary Putnam** (*1926).

Voraussetzung: Formel in **NNF** über \neg, \wedge, \vee .

Davis-Putnam-Algorithmen (Fort.)

Beispiel 3.23 (Darstellung der Abarbeitung als Baum)

$$A \equiv \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (q \vee s) \wedge \neg r \wedge \neg s \wedge (p \vee q))$$



Substitution

Definition 3.24 (Substitution)

Sei Formel $A \in F$ in NNF und $p \in V$.

Definiere $A[p/1]$ als Ergebnis des folgenden Ersetzungsprozesses:

- (1) Ersetze in A jedes Vorkommen von p durch 1.
- (2) Führe folgende Regeln so lange wie möglich durch:
 - Tritt eine Teilformel $\neg 1$ auf, ersetze sie durch 0.
 - Ersetze $\neg 0$ durch 1.
 - Teilformeln $B \wedge 1$ sowie $B \vee 0$ werden durch B ersetzt.
 - Teilformeln $B \vee 1$ werden durch 1 ersetzt.
 - Teilformeln $B \wedge 0$ werden durch 0 ersetzt.

Analog ist $A[p/0]$ definiert, wobei p durch 0 ersetzt wird.

Allgemeiner verwende $A[l/1]$ bzw. $A[l/0]$ für Literale l .

Substitution (Fort.)

Lemma 3.25

$A[p/1]$ und $A[p/0]$ sind wohldefiniert.

Formel $A[p/i]$ mit $i \in \mathbb{B}$ ist in NNF bzw. KNF, wenn A diese Form hatte.

Variable $p \in V$ kommt nicht mehr in $A[p/i]$ vor.

Bemerkung 3.26

Für A in KNF und Literal l ist folgende Auffassung äquivalent.

$A[l/1]$ entsteht durch Streichen aller Klauseln in A , die Literal l enthalten, und durch Streichen aller Vorkommen von $\neg l$ in den anderen Klauseln.

Die *leere Formel* wird als *wahr* interpretiert.

Die *leere Klausel* wird als *falsch* interpretiert.

Korrektheit von Davis-Putnam-Algorithmen

Lemma 3.27

Eine Formel A in NNF ist erfüllbar *gdw.* $A[p/1] = 1$ oder $A[p/0] = 1$ oder eine der Formeln $A[p/1], A[p/0]$ erfüllbar ist.

Das Lemma folgt aus der Tatsache, dass für jede Bewertung φ gilt

$$\varphi(A) = \varphi(A[p/i]), \quad \text{wobei } i = \varphi(p).$$

Durch Testen der Formeln $A[p/1]$ und $A[p/0]$, die nun $p \in V$ nicht mehr enthalten, kann rekursiv die Erfüllbarkeit von A entschieden werden.

Regelbasierte Definition von Davis-Putnam

Definition 3.28 (Regeln für Formeln in NNF)

Pure-Literal Regel Kommt eine Variable $p \in V$ in Formel A nur positiv oder nur negativ vor, belege p mit 1 bzw. p mit 0 und kürze die Formel.

A ist erfüllbarkeitsäquivalent mit $A[p/1]$ bzw. $A[p/0]$.

Splitting-Regel Kommt eine Variable $p \in V$ sowohl positiv als auch negativ in A vor, bilde die zwei Kürzungen $A[p/1]$ und $A[p/0]$.

A ist erfüllbar gdw. bei einer der Kürzungen der Wert 1 oder eine erfüllbare Formel auftritt.

Regelbasierte Definition von Davis-Putnam (Fort.)

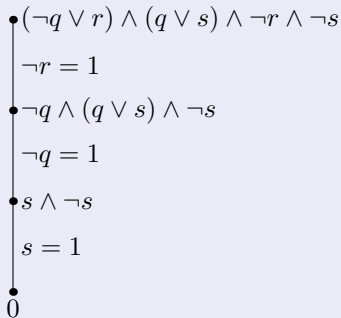
Definition 3.29 (Regeln für Formeln in **KNF**)

Unit-Regel

Sei A in KNF und enthalte eine Unit-Klausel $A_i \equiv l$.

Bilde $A[l/1]$:

A erfüllbar gdw. $A[l/1]$ erfüllbar.



Regelbasierte Definition von Davis-Putnam (Fort.)

Klausel A_1 **subsumiert** Klausel A_2 , in Zeichen $A_1 \subseteq A_2$, falls jedes Literal aus A_1 auch in A_2 auftritt.

Aus der Erfüllbarkeit einer Klausel A_1 folgt sofort die Erfüllbarkeit aller Klauseln A_2 , die sie subsummiert: $A_1 \subseteq A_2$.

Definition 3.29 (Regeln für Formeln in **KNF** (Fort.))

Subsumption-Rule Sei A in KNF. Streiche aus A alle Klauseln, die von anderen subsumiert werden: Funktion `Subsumption_Reduce(A)`.

Streiche dabei auch tautologische Klauseln, die p und $\neg p$ für ein $p \in V$ enthalten.

Da Klauseln konjunktiv verknüpft sind, sind nur die zu berücksichtigen, die von keiner anderen subsumiert werden.

procedure DPA — Davis-Putnam-Algorithmus

Eingabe: A in KNF

Ausgabe: Boolescher Wert für Erfüllbarkeit $\{0,1\}$

begin

if $A \in \{0, 1\}$ **then** return(A);

$(p, b) :=$ pure(A);

//Liefert Variable und Belegung, falls nur positiv

//oder nur negativ vorkommt, sonst null

if $(p, b) \neq$ null **then** return(DPA($A[p/b]$));

$(p, b) :=$ unit(A);

//Unit Klausel mit Belegung, sonst null

if $(p, b) \neq$ null **then** return(DPA($A[p/b]$));

$A :=$ Subsumption_Reduce(A);

//Entfernt subs. Klauseln

$p :=$ split(A);

//Liefert Variable in A

if DPA($A[p/1]$) = 1 **then** return(1);

return(DPA($A[p/0]$));

end

Auswahlkriterien für die Splitting-Regel

- Wähle die erste in der Formel vorkommende Variable.
- Wähle die Variable, die am häufigsten vorkommt.
- Wähle die Variable mit $\sum_{p \text{ in } A_i} |A_i|$ minimal.
- Wähle die Variable, die in den kürzesten Klauseln am häufigsten vorkommt.
- Berechne die Anzahl der positiven und negativen Vorkommen in den kürzesten Klauseln und wähle die Variable mit der größten Differenz.
- Weitere **Heuristiken** in Implementierungen vorhanden.

Resolution

Idee: Aus Klauseln $(A \vee I)$ und $(B \vee \neg I)$ wird die neue Klausel $(A \vee B)$ erzeugt, denn

$$(A \vee I) \wedge (B \vee \neg I) \models (A \vee I) \wedge (B \vee \neg I) \wedge (A \vee B).$$

Dabei sei $\neg I \equiv \neg p$, falls $I \equiv p$ mit $p \in V$. Falls $I \equiv \neg p$, dann $\neg I \equiv p$.

Ziel: Leere Klausel \square erzeugen, um **Unerfüllbarkeit** zu zeigen.

Resolution arbeitet auf Formeln **in KNF**. Dabei ist es günstig, Klauseln als Mengen darzustellen:

$$(p \vee \neg q \vee p) \quad \text{dargestellt als} \quad \{p, \neg q\}.$$

Resolution geht zurück auf **John Alan Robinson (1930 – 2016)**.

Resolution (Fort.)

Definition 3.30 (Resolvente)

Seien K_1, K_2 Klauseln und l ein Literal mit $l \in K_1$ und $\neg l \in K_2$. Dann ist

$$R \equiv (K_1 \setminus \{l\}) \cup (K_2 \setminus \{\neg l\})$$

die **Resolvente** von K_1 und K_2 nach l .

Beachte: Die Resolvente kann die leere Klausel \square sein.

Das Hinzufügen von Resolventen führt zu äquivalenten Formeln.

Lemma 3.31

Sei A in KNF und R Resolvente zweier Klauseln aus A . Dann gilt

$$A \models A \cup \{R\}.$$

Resolution (Fort.)

Definition 3.32 (Herleitungen)

Seien A in KNF und K Klausel. Eine Folge K_1, \dots, K_n von Klauseln mit $K_n \equiv K$ ist eine **Herleitung von K aus A** , $A \underset{\text{Res}}{\vdash} K$, falls für $1 \leq k \leq n$:

$K_k \in A$ oder K_k ist eine Resolvente zweier K_i, K_j mit $i, j < k$.

Lemma 3.33

Als Kalkül ist Resolution korrekt aber **nicht vollständig**:

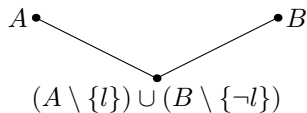
$A \underset{\text{Res}}{\vdash} K$ impliziert $A \models K$. Die Umkehrung gilt nicht.

Satz 3.34 (Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit, Robinson)

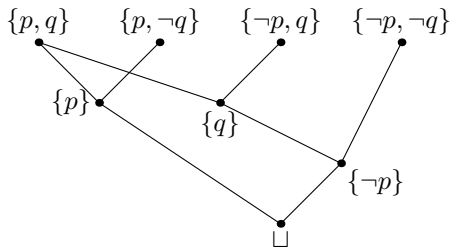
Eine Formel A in KNF ist unerfüllbar gdw. $A \underset{\text{Res}}{\vdash} \perp$.

Darstellung

Darstellung einer **Resolvente** zweier Klauseln A, B nach l :



Darstellung von **Herleitungen** als gerichteter, azyklischer Graph (DAG):



Starke Herleitungen: Sei A in KNF und unerfüllbar.

Dann gibt es eine Herleitung $K_1, \dots, K_n \equiv \perp$, so dass

- 1 in der Herleitung keine Klausel mehrfach auftritt,
- 2 in der Herleitung keine Tautologie auftritt,
- 3 in der Herleitung keine schon subsumierte Klausel auftritt:
Es gibt keine K_i, K_j mit $i < j$ und $K_i \subseteq K_j$.

Resolventenmethode: Heuristiken (Fort.)

- Stufenstrategie (Resolutionsabschluss)
(Alle erfüllenden Bewertungen)
- Stützmengenrestriktion
(Set-of-Support, Unit-Klauseln bevorzugen)
- P-(N-)Resolution
- Lineare Resolution (SL-Resolution, PROLOG-Inferenzmaschine).

Resolventenmethode: Heuristiken (Fort.)

Beispiel: $A \equiv \{\{\neg p, \neg q, \neg r\}, \{p, \neg s\}, \{q, \neg r\}, \{r, \neg t\}, \{t\}\}$

Stufen:

0	1	2	3
1. $\{\neg p, \neg q, \neg r\}$	6. $\{\neg q, \neg r, \neg s\}$ (1,2)	11. $\{\neg r, \neg s\}$ (6,3)	21. $\{\neg s, \neg t\}$ (11,4)
2. $\{p, \neg s\}$	7. $\{\neg p, \neg r\}$ (1,3)	12. $\{\neg q, \neg s, \neg t\}$ (6,4)	22. $\{\neg s\}$ (11,10)
			⋮
3. $\{q, \neg r\}$	8. $\{\neg p, \neg q, \neg t\}$ (1,4)	13. $\{\neg p, \neg t\}$ (7,4)	
4. $\{r, \neg t\}$	9. $\{q, \neg t\}$ (3,4)	14. $\{\neg p, \neg r, \neg t\}$ (8,3)	
5. $\{t\}$	10. $\{r\}$ (4,5)	15. $\{\neg p, \neg q\}$ (8,5)	
		16. $\{q\}$ (10,3)	
		17. $\{\neg r, \neg s, \neg t\}$ (6,9)	
		18. $\{\neg q, \neg s\}$ (6,10)	
		19. $\{\neg p\}$ (7,10)	
		20. $\{\neg p, \neg t\}$ (8,9)	

Erhalte die erfüllende Bewertung

$$\varphi(q) = 1, \varphi(p) = 0, \varphi(s) = 0, \varphi(r) = 1, \varphi(t) = 1.$$

Teil II

Prädikatenlogik erster Stufe (mit Gleichheit)

Grundlagen der Prädikatenlogik

Ziel: Formulierung und Folgerung von Beziehungen zwischen Elementen eines Datenbereichs.

Anwendungen:

- Lösung von Anfragen auf Datenmengen in der KI oder in Informationssystemen.
- Formulierung von Integritätsbedingungen auf Daten: Schleifeninvarianten eines Programms, Constraints auf XML-Dateien oder Datenbankeinträgen.
- Lösung von Constraint-Systemen beim Testen oder Planen.
- Logisches Programmieren.

Syntax der Prädikatenlogik 1879 im Artikel *Begriffsschrift* von Gottlob Frege (1848 — 1925).

Semantik erst 1934 durch Alfred Tarski (1901 — 1983).

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Semantisch: Elemente eines Datenbereich, **Funktionen** auf diesen Elementen und **Beziehungen** zwischen diesen Elementen.

Syntaktisch:

- **Terme** beschreiben **Elemente des Datenbereichs**.
Zur Bezeichnung der Elemente: **Konstanten** und **Variablen**.
Zur Berechnung weiterer Elemente: **Funktionssymbole**.
- **Formeln** treffen Aussagen über die Elemente: **wahr** oder **falsch**.
Zum Fassen von Beziehungen zwischen Elementen: **Prädikatssymbole**.
Verknüpfung der resultierenden Wahrheitswerte über logische **Junktoren** und **Quantoren**.

Funktions- und Prädikatssymbole **hängen von der Anwendung ab**, sind also Parameter in der Definition der Syntax.

Logische Symbole sind **fest**.

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Beispiel 4.1 (Beschreibung mathematischer Beziehungen)

Syntax: Konstanten 1, 2, 3, Funktionssymbole +, /, Variablen x, y, z , Prädikat $<$, Junktoren \rightarrow, \wedge , Quantoren \forall, \exists

Terme: $1, 1 + \frac{2}{3}, x + \frac{3}{2}$

Formeln: $x < 3, \forall x \forall y (x < y \rightarrow \exists z (x < z \wedge z < y))$

Semantik: Datenbereich \mathbb{Q} , Konstante 1 bis Prädikat $<$ mit der üblichen Bedeutung.

Grundlagen der Prädikatenlogik (Fort.)

Beispiel 4.2 (Beschreibung von Beziehungen zwischen Daten)

Syntax: Variablen x, y , Funktion $weiteDerReise(-)$, Prädikate $istHund(-)$, $istFisch(-)$, $<$, Quantor \forall .

Formel:

$$\forall x \forall y ((istHund(x) \wedge istFisch(y)) \rightarrow weiteDerReise(x) < weiteDerReise(y))$$

Semantik: Datenbereich $\{Lassie, Nemo\} \cup \mathbb{N} \cup \{\perp\}$.

Funktion $weiteDerReise(x)$ liefert die **Weite der Reise eines Tieres** des Datenbereichs und \perp , falls kein Tier eingegeben wird.

Prädikat $istFisch(x)$ liefert **wahr**, falls x ein Fisch ist.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe

Definition 4.3 (Signatur)

Eine **Signatur** ist ein Paar $S = (Funk, Präd)$ mit

- *Funk* einer Menge von **Funktionssymbolen** $f, g, \dots \in Funk$ und
- *Präd* einer Menge von **Prädikatssymbolen** $p, q, \dots \in Präd$.

Jedes Funktions- und jedes Prädikatssymbol hat eine **Stelligkeit** $k \in \mathbb{N}$.
Schreibe auch $f/k \in Funk$ bzw. $p/k \in Präd$, falls f bzw. p Stelligkeit k hat.
0-stellige Funktionen und Prädikate heißen **Konstanten**.

Voraussetzungen:

- *Funk* und *Präd* seien **entscheidbar**, nicht notwendigerweise endlich.
- Neben der Signatur gebe es eine abzählbare Menge V an **Variablen**.
Es seien $V, Funk, Präd$ paarweise disjunkt und enthalten nicht

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \exists, \forall, , , = , (,).$$

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.4 (Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe)

Sei $S = (Funk, Präd)$ eine Signatur.

Die Menge $Term(S)$ aller **Terme über S** ist induktiv definiert als

$$t ::= x \mid f(t_1, \dots, t_k), \quad \text{wobei } x \in V \text{ und } f/k \in Funk.$$

Die Menge $FO(S)$ der **prädikatenlogischen Formeln erster Stufe über S** ist induktiv definiert als

$$\begin{aligned} A ::= & t_1 = t_2 \mid p(t_1, \dots, t_k) \mid \\ & (\neg A) \mid (A_1 \wedge A_2) \mid (A_1 \vee A_2) \mid (A_1 \rightarrow A_2) \mid (A_1 \leftrightarrow A_2) \mid \\ & (\exists x A) \mid (\forall x A) \end{aligned}$$

mit $t_1, t_2, \dots, t_k \in Term(S)$, $p/k \in Präd$ und $x \in V$.

Nenne $t_1 = t_2$ und $p(t_1, \dots, t_k)$ auch **atomare Formeln**.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Zur besseren **Lesbarkeit**:

- Äußere Klammern weglassen.
- **Prioritäten**: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
- $\forall x_1, \dots, x_n A$ steht für $\forall x_1(\dots(\forall x_n A)\dots)$
 $\exists x_1, \dots, x_n A$ steht für $\exists x_1(\dots(\exists x_n A)\dots)$
- Für zweistellige Prädikats- und Funktionssymbole wird auch Infix-Notation genutzt. Beispiel $t_1 < t_2$ statt $<(t_1, t_2)$.

Syntax der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.5 (Freie und gebundene Variablen)

In einer Formel (QxA) mit $Q \in \{\exists, \forall\}$ ist A der **Geltungsbereich** von Qx .

Ein **Vorkommen** einer Variablen $x \in V$ in einer Formel heißt **gebunden**, falls es im Geltungsbereich eines Quantors Qx vorkommt.

Sonstige Vorkommen einer Variablen heißen **frei**.

Formeln ohne freie Vorkommen heißen **abgeschlossen**.

Die Menge $V(A)$ enthält die **Variablen** in $A \in FO(S)$. Ähnlich enthalten $FV(A)$ und $GV(A)$ die Variablen, die **gebunden** bzw. **frei** in A vorkommen.

Lemma 4.6

- Ist S entscheidbar, dann sind $Term(S)$ und $FO(S)$ entscheidbar.*
- Zusammengesetzte Terme und Formeln lassen sich eindeutig zerlegen.*
- Freie und gebundene Vorkommen lassen sich effektiv bestimmen.*

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Terme und Formeln sind **syntaktische** Objekte **ohne Bedeutung**.

Was bedeutet ein Term? Was bedeutet eine Formel?

Definition 4.7 (Struktur)

Sei $S = (\text{Funk}, \text{Präd})$ eine Signatur. Eine **Struktur der Signatur S** , auch **S -Struktur** genannt, ist ein Paar $\mathcal{M} = (D, I)$ bestehend aus

einer nicht-leeren Menge D , dem **Datenbereich**,

und einer **Interpretation** I der Funktions- und Prädikatssymbole aus S . Dabei bildet I jedes $f/k \in \text{Funk}$ auf eine k -stellige Funktion

$$I(f) : D^k \rightarrow D \quad (\text{schreibe auch } f^{\mathcal{M}} \text{ statt } I(f))$$

und jedes $p/k \in \text{Präd}$ auf ein k -stelliges Prädikat ab:

$$I(p) : D^k \rightarrow \mathbb{B} \quad (\text{schreibe auch } p^{\mathcal{M}} \text{ statt } I(p)).$$

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Annahme: Strukturen sind passend zu Signaturen gewählt.

Beachte: Gleichheit ist ein logisches Symbol, nicht Teil der Signatur.
Wird nicht durch die Struktur interpretiert.

Definition 4.8 (Belegung)

Eine **Belegung der Variablen** in $\mathcal{M} = (D, I)$ ist eine Abbildung

$$\sigma : V \rightarrow D.$$

Die **Modifikation** $\sigma\{x/d\}$ von σ ist die Belegung mit

$$\sigma\{x/d\}(y) := \begin{cases} d, & \text{falls } y = x \\ \sigma(y), & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die **Menge aller Belegungen** wird mit D^V bezeichnet.

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.9 (Semantik von Termen)

Die **Semantik eines Terms** $t \in \text{Term}(S)$ in $\mathcal{M} = (D, I)$ ist eine Funktion

$$\mathcal{M}[[t]] : D^V \rightarrow D,$$

die induktiv wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{M}[[x]](\sigma) := \sigma(x)$$

$$\mathcal{M}[[f(t_1, \dots, t_k)]](\sigma) := f^{\mathcal{M}}(\mathcal{M}[[t_1]](\sigma), \dots, \mathcal{M}[[t_k]](\sigma)).$$

Dabei ist $\mathcal{M}[[t]](\sigma)$ der **Datenwert von t in \mathcal{M} unter Belegung σ** .

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.10 (Semantik von Formeln)

Die **Semantik einer Formel** $A \in FO(S)$ in $\mathcal{M} = (D, I)$ ist eine Funktion

$$\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket : D^V \rightarrow \mathbb{B},$$

die induktiv wie folgt definiert ist:

$$\mathcal{M} \llbracket t_1 = t_2 \rrbracket (\sigma) := 1 \quad \text{gdw.} \quad \mathcal{M} \llbracket t_1 \rrbracket (\sigma) = \mathcal{M} \llbracket t_2 \rrbracket (\sigma)$$

$$\mathcal{M} \llbracket p(t_1, \dots, t_k) \rrbracket (\sigma) := p^{\mathcal{M}}(\mathcal{M} \llbracket t_1 \rrbracket (\sigma), \dots, \mathcal{M} \llbracket t_k \rrbracket (\sigma))$$

$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ wie in der Aussagenlogik: $\mathcal{M} \llbracket \neg A \rrbracket (\sigma) := 1 - \mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma)$ etc.

$$\mathcal{M} \llbracket \exists x A \rrbracket (\sigma) := 1 \quad \text{gdw.} \quad \text{es gibt } d \in D \text{ mit } \mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma \{x/d\}) = 1$$

$$\mathcal{M} \llbracket \forall x A \rrbracket (\sigma) := 1 \quad \text{gdw.} \quad \text{für alle } d \in D \text{ gilt } \mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma \{x/d\}) = 1.$$

Nenne $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma)$ den **Wahrheitswert von A in \mathcal{M} unter Belegung σ** .

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Lemma 4.11 (Koinzidenzlemma)

Betrachte $A \in FO(S)$, $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in D^V$. Falls $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ für alle $x \in FV(A)$, dann gilt

$$\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma_1) = \mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma_2).$$

Insbesondere ist die Semantik $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket (\sigma)$ **geschlossener** Formeln $A \in FO(S)$ **unabhängig von der Belegung** $\sigma \in D^V$:

entweder gilt A unter **allen** Belegungen oder unter **keiner**.

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.12 (Erfüllbarkeit, Tautologie)

Seien $A \in FO(S)$, $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\sigma \in D^V$.

- A gilt in \mathcal{M} unter σ , in Zeichen $\mathcal{M}, \sigma \models A$, falls $\mathcal{M}[[A]](\sigma) = 1$.
- Falls A geschlossen, ist die Belegung nach Lemma 4.11 unerheblich. Schreibe $\mathcal{M} \models A$ und sage \mathcal{M} ist ein Modell für A .
- A ist eine Tautologie oder allgemeingültig, in Zeichen $\models A$, falls für alle S -Strukturen \mathcal{M} und alle Belegungen $\sigma \in D^V$ gilt: $\mathcal{M}, \sigma \models A$.
- A ist erfüllbar, falls es eine S -Struktur \mathcal{M} und eine Belegung $\sigma \in D^V$ gibt mit $\mathcal{M}, \sigma \models A$.

Lemma 4.13

Formel $A \in FO(S)$ ist allgemeingültig gdw. $\neg A$ unerfüllbar ist.

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Definition 4.14 (Logische Äquivalenz)

Formeln $A, B \in FO(S)$ heißen **logisch äquivalent**, in Zeichen $A \models B$, falls für alle Strukturen \mathcal{M} und alle Belegungen σ gilt:

$$\mathcal{M}[[A]](\sigma) = \mathcal{M}[[B]](\sigma).$$

Lemma 4.15

*Logische Äquivalenz ist eine **Kongruenz**: ersetzt man in einer Formel $A \in FO(S)$ eine Teilformel B durch $C \models B$, dann erhält man $A' \models A$.*

Semantik der Prädikatenlogik erster Stufe (Fort.)

Lemma 4.16 (Logische Äquivalenzen)

Seien $A, B \in FO(S)$. Dann gilt:

$$\neg \forall x A \models \exists x \neg A \qquad \neg \exists x A \models \forall x \neg A \qquad (8)$$

$$\forall x A \wedge \forall x B \models \forall x (A \wedge B) \qquad \exists x A \vee \exists x B \models \exists x (A \vee B) \qquad (9)$$

$$\forall x \forall y A \models \forall y \forall x A \qquad \exists x \exists y A \models \exists y \exists x A. \qquad (10)$$

Falls außerdem $x \notin FV(B)$, gilt

$$Qx A \text{ op } B \models Qx (A \text{ op } B) \text{ mit } Q \in \{\forall, \exists\} \text{ und } \text{op} \in \{\wedge, \vee\}. \qquad (11)$$

Bemerkung: Äquivalenzen (8), (9) und (11) ziehen Quantoren nach außen.

Bei der Verwendung logischer Äquivalenzen ist Vorsicht geboten:

$$\forall x A \vee \forall x B \not\models \forall x (A \vee B) \qquad \exists x A \wedge \exists x B \not\models \exists x (A \wedge B).$$

Substitution

Substitutionen ersetzen Variablen durch Terme.

Sie sind das **syntaktische** Gegenstück zum **semantischen** Konzept der Belegungen, genauer deren Modifikation.

Definition 4.17 (Substitution)

Eine **Substitution** der Signatur S ist eine endliche Abbildung

$$\theta : V \rightarrow \text{Term}(S).$$

Substitutionen werden oft direkt angegeben als $\theta = \{x_1/t_1, \dots, x_n/t_n\}$.

Substitution (Fort.)

Die Anwendung von Substitutionen auf Terme und Formeln vermeidet es, neue Bindungen einzuführen.

Definition 4.18 (Anwendung von Substitutionen)

Die Anwendung von θ auf $t \in \text{Term}(S)$ liefert einen neuen Term $t\theta \in \text{Term}(S)$, der induktiv wie folgt definiert ist:

$$x\theta := \theta(x) \qquad f(t_1, \dots, t_n)\theta := f(t_1\theta, \dots, t_n\theta).$$

Für $A \in \text{FO}(S)$ liefert die Anwendung von θ die Formel $A\theta \in \text{FO}(S)$ mit

$$\begin{aligned} (t_1 = t_2)\theta &:= t_1\theta = t_2\theta & (\neg A)\theta &:= \neg(A\theta) \\ p(t_1, \dots, t_n)\theta &:= p(t_1\theta, \dots, t_n\theta) & (A \text{ op } B)\theta &:= A\theta \text{ op } B\theta \\ & & (Qx.A)\theta &:= Qy(A\{x/y\}\theta), \end{aligned}$$

wobei $y \notin V(A) \cup \text{Dom}(\theta) \cup \text{Ran}(\theta)$.

Substitution (Fort.)

Der Zusammenhang zwischen Substitutionen und der Modifikation von Belegungen ist wie folgt:

Lemma 4.19 (Substitutionslemma)

$$\mathcal{M}[A\{x/t\}](\sigma) = \mathcal{M}[A](\sigma\{x/\mathcal{M}[t](\sigma)\}).$$

Der Beweis wird mittels Induktion über den Aufbau von Termen und Formeln geführt.

Korollar 4.20

- i) *Ist $A \in FO(S)$ allgemeingültig, dann auch $A\{x/t\}$.*
- ii) *Die Formel $\forall x.A \rightarrow A\{x/t\}$ ist allgemeingültig.*

Substitution (Fort.)

Ähnlich zum Substitutionslemma erhält man:

Lemma 4.21 (Gebundene Umbenennung erhält logische Äquivalenz)

$$QxA \models Qy(A\{x/y\}).$$

Bemerkung: Gebundene Umbenennung kann die Vorkommen von gebundenen Variablen in einer Formel **eindeutig** machen.

Normalformen

Erzeuge Formeln von **einfacherer Gestalt**, für die sich Aussagen eher zeigen und effizientere Algorithmen entwerfen lassen.

Pränexnormalform: Alle Quantoren außen (bis auf logische Äquivalenz).

Skolemform: Pränexnormalform und außerdem nur Allquantoren (bis auf Erfüllbarkeitsäquivalenz).

Lemma 4.22 (Existentieller und universeller Abschluss)

Betrachte $A \in FO(S)$ mit $FV(A) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Dann gilt

A ist allgemeingültig gdw. $\forall x_1 \dots \forall x_n. A$ ist allgemeingültig

A ist erfüllbar gdw. $\exists x_1 \dots \exists x_n. A$ ist erfüllbar.

Formel $\forall x_1 \dots \forall x_n. A$ ist der **universelle Abschluss** von A .

Formel $\exists x_1 \dots \exists x_n. A$ ist der **existentielle Abschluss** von A .

Normalformen (Fort.)

Eine Formel $A \in FO(S)$ heißt **bereinigt**, falls

- i) keine Variable frei und gebunden vorkommt und
- ii) jede Variable höchstens einmal gebunden wird.

Durch wiederholte Anwendung gebundener Umbenennung in Lemma 4.21 kann man jede Formel bereinigen.

Lemma 4.23

Zu jeder Formel $A \in FO(S)$ gibt es eine *bereinigte* Formel $B \in FO(S)$ mit $A \models B$.

Normalformen (Fort.)

Nächstes Ziel: Ziehe Quantoren nach außen.

Trick: Nutze Äquivalenzen aus Lemma 4.16.

Definition 4.24

Eine Formel der Gestalt $A \equiv Q_1 y_1 \dots Q_n y_n . B$ ist in **Pränexnormalform**, wobei $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$ und B quantorenfrei.

Sage $A \in FO(S)$ ist in **BPF**, falls A bereinigt und in Pränexnormalform ist.

Satz 4.25

Zu jeder Formel $A \in FO(S)$ gibt es eine Formel $B \in FO(S)$ in **BPF** mit $A \models B$.

Hinter dem Beweis (Tafel) verbirgt sich ein rekursiver Algorithmus. Es dient dem Verständnis, dieses Verfahren selbst herauszuarbeiten.

Normalformen (Fort.)

Letzter Schritt: **Eliminiere Existenzquantoren**.

Trick: Stelle Schachtelung der Quantoren **für alle $y_1 \dots y_n$ gibt es ein z** als Funktion $z = f(y_1, \dots, y_n)$ dar:

$$\forall y_1 \dots \forall y_n \exists z. A \quad \text{ergibt} \quad \forall y_1 \dots \forall y_n. (A\{z/f(y_1, \dots, y_n)\}).$$

Dabei ist $f/_n$ ein frisches Funktionssymbol aus der Menge *Sko* der **Skolemfunktionen**. Frisch heißt, *Sko* ist disjunkt von *S*.

Die Einführung von Skolemfunktionen für existenzquantifizierte Variablen wird **Skolemisierung** genannt.

Skolemisierung erhält nur Erfüllbarkeitsäquivalenz, logische Äquivalenz muss aufgegeben werden.

Skolemisierung geht zurück auf **Thoralf Albert Skolem (1887 – 1963)**.

Normalformen (Fort.)

Definition 4.26 (Skolemformel)

Für eine Formel $A \in FO(S)$ in BPF ist die **Skolemformel** $B \in FO(S \uplus Sko)$ (wieder in BPF) durch folgendes Verfahren definiert:

while A hat Existenzquantoren **do**

Sei $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n \exists z. B$ mit B in BPF

Sei $f/n \in Sko$ ein Skolemsymbol außerhalb von B

Setze $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n (B\{z/f(y_1, \dots, y_n)\})$

end while

Beachte: Skolemfunktionen werden **von außen nach innen** eingeführt.

Satz 4.27 (Skolem)

Für jede Formel $A \in FO(S)$ in BPF und die zugehörige Skolemformel $B \in FO(S \uplus Sko)$ gilt:

A ist erfüllbar gdw. B ist erfüllbar.

Das Allgemeingültigkeitsproblem

Untersuche Berechenbarkeit des **Allgemeingültigkeitsproblems**:

Gegeben: Eine Formel $A \in FO(S)$.

Frage: Ist A allgemeingültig?

Ziel: Allgemeingültigkeit ist **vollständig in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme**. Genauer:

Obere Schranke:

Allgemeingültigkeit ist semi-entscheidbar.

Untere Schranke:

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist hart in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.

Insbesondere ist Allgemeingültigkeit **unentscheidbar**.

Herbrand-Theorie

Um semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit zu zeigen, nutze

$A \in FO(S)$ ist allgemeingültig gdw. $\neg A$ ist unerfüllbar.

Ziel: Unerfüllbarkeit ist semi-entscheidbar.

Problem: Bei der Wahl von $\mathcal{M} = (D, I)$ ist der Datenbereich beliebig.

- Keine Aussage über die Mächtigkeit von D .
- Keine Information über die Struktur von I .

Wie soll man Strukturen aufzählen und auf Modelleigenschaft prüfen?

Kernbeitrag: Die Suche nach Modellen kann auf **kanonische Strukturen** eingeschränkt werden.

Um ein Modell für A zu finden, **genügt es**, in folgendem Datenbereich zu suchen

$D_{\mathcal{H}} =$ Alle variablenfreien Terme über Signatur S .

Herbrand-Theorie (Fort.)

Annahme: $FO^{\neq}(S)$ mit $S = (Funk, Präd)$, wobei *Funk* eine Konstante enthält.

Definition 4.28 (Herbrand-Struktur)

Eine Struktur \mathcal{H} von S heißt **Herbrand-Struktur**, falls $\mathcal{H} = (D_{\mathcal{H}}, I_{\mathcal{H}})$. Dabei ist $D_{\mathcal{H}}$ die kleinste Menge, für die gilt:

- i) Falls $a/0 \in Funk$, dann $a \in D_{\mathcal{H}}$
- ii) Falls $f/n \in Funk$ und $t_1, \dots, t_n \in D_{\mathcal{H}}$, dann $f(t_1, \dots, t_n) \in D_{\mathcal{H}}$.

Die Interpretation $I_{\mathcal{H}}(f) : D_{\mathcal{H}}^n \rightarrow D_{\mathcal{H}}$ der Funktionssymbole $f/n \in Funk$ ist festgelegt als

$$I_{\mathcal{H}}(f)(t_1, \dots, t_n) := f(t_1, \dots, t_n).$$

Die Interpretation der Prädikatssymbole ist noch offen, eine Herbrand-Struktur muss nur diesen beiden Einschränkungen genügen.

Herbrand-Theorie (Fort.)

Gegeben sei eine geschlossene Formel $A \in FO^{\neq}(S)$. Eine Herbrand-Struktur \mathcal{H} mit $\mathcal{H} \models A$ heißt auch **Herbrand-Modell** von A .

Satz 4.29 (Herbrand)

Sei $A \in FO^{\neq}(S)$ eine geschlossene Formel in Skolemnormalform. Dann gilt:

A ist erfüllbar **gdw.** A hat ein **Herbrand-Modell**.

Korollar 4.30 (Satz von Löwenheim-Skolem)

Sei $A \in FO(S)$ erfüllbar. Dann besitzt A ein Modell $\mathcal{M} = (D, I)$, dessen Datenbereich D **abzählbar** ist.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit

Definition 4.31 (Herbrand-Expansion)

Sei $A \equiv \forall y_1 \dots \forall y_n. B \in FO^\neq(S)$ geschlossen und in Skolemnormalform. Dann ist die **Herbrand-Expansion** $E(A)$ von A definiert als

$$E(A) := \{B\{y_1/t_1\} \dots \{y_n/t_n\} \mid t_1, \dots, t_n \in D_{\mathcal{H}}\}.$$

Es werden also alle Variablen in B durch Terme in $D_{\mathcal{H}}$ ersetzt.

Beobachtung:

- Die Formeln in $E(A)$ lassen sich wie aussagenlogische Formeln behandeln, da sie keine Variablen enthalten.
- Betrachte Herbrand-Struktur zur Interpretation der Formeln in $E(A)$.
- Sie gibt Wahrheitswerte der aussagenlogischen Variablen in $E(A)$ an.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Satz 4.32 (Gödel-Herbrand-Skolem)

Für eine geschlossene Formel $A \in FO^\neq(S)$ in Skolemnormalform gilt:

A ist erfüllbar gdw. $E(A)$ ist aussagenlogisch erfüllbar.

Intuition: Die prädikatenlogische Formel A wird durch die aussagenlogischen Formeln in $E(A)$ approximiert.

Kombiniere Satz 4.32 mit dem Kompaktheitssatz der Aussagenlogik.

Korollar 4.33

Eine geschlossene Formel $A \in FO^\neq(S)$ in Skolemnormalform ist unerfüllbar gdw. es eine **endliche** Teilmenge von $E(A)$ gibt, die unerfüllbar ist.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Damit folgt semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit:

$A \in FO(S)$ ist allgemeingültig gdw. $\neg A$ ist unerfüllbar.

Überführe $\neg A$ in eine geschlossene Formel $B \in FO^{\neq}(S \uplus Sko)$ in Skolemnormalform.

Obige Argumentation liefert den **Algorithmus von Gilmore**, der Unerfüllbarkeit von B semi-entscheidet.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Algorithmus von Gilmore:

Input: $A \in FO^{\neq}(S \uplus Sko)$ geschlossen und in Skolemnormalform.

Sei $E(A) = \{A_1, A_2, \dots\}$ eine Aufzählung von $E(A)$.

$n:=1$

while $A_1 \wedge \dots \wedge A_n$ ist aussagenlogisch erfüllbar **do**

$n:=n+1$

end while

return unerfüllbar

Mit Korollar 4.33:

Terminiert und liefert korrektes Ergebnis auf unerfüllbaren Formeln.

Terminiert nicht auf erfüllbaren Formeln.

Satz 4.34

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist semi-entscheidbar.

Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit (Fort.)

Beachten Sie, dass aus Semi-Entscheidbarkeit der Allgemeingültigkeit **nicht** mittels Negation der Formel die Entscheidbarkeit folgt:

$$\not\models A \text{ ist nicht äquivalent zu } \models \neg A.$$

Nur Letzteres lässt sich mittels Herbrand-Expansion prüfen.

Zeige nun tatsächlich **Unentscheidbarkeit** der Allgemeingültigkeit.

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit

Ziel: Das Allgemeingültigkeitsproblem ist **hart** in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.

Das heißt, **jedes** semi-entscheidbare Problem besitzt eine many-one Reduktion auf Allgemeingültigkeit.

Konsequenz: Allgemeingültigkeit ist **unentscheidbar** (Halteproblem).

Definition 4.35 (Many-one Reduktion)

Eine **many-one Reduktion** eines Problems P_1 auf ein Problem P_2 ist eine **totale** und **berechenbare** Funktion $f : P_1 \rightarrow P_2$, die Instanzen des Problems P_1 auf Instanzen des Problems P_2 abbildet, so dass

Instanz K von P_1 hat Lösung gdw. Instanz $f(K)$ von P_2 hat Lösung.

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit (Fort.)

Wie beweist man Härte von Allgemeingültigkeit? Es ist eine allquantifizierte Aussage.

Betrachte ein bereits als hart bekanntes Problem. Wähle hier das **Postsche Korrespondenzproblem (PCP)**.

Gib eine many-one Reduktion **von PCP auf Allgemeingültigkeit** an.

Warum zeigt diese Reduktion Härte von Allgemeingültigkeit?

Sei P ein semi-entscheidbares Problem und f_P dessen Reduktion auf PCP. Reduktion f_P existiert, da PCP hart ist.

Sei f die Reduktion von PCP auf Allgemeingültigkeit, die noch zu finden ist.

Dann gilt:

$$P \xrightarrow{f_P} \text{PCP} \xrightarrow{f} \text{Allgemein} \quad \text{impliziert} \quad P \xrightarrow{f \circ f_P} \text{Allgemein}.$$

Das Postsche Korrespondenzproblem

Gegeben: Eine endliche Folge von Wortpaaren

$$((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \quad \text{mit} \quad x_i, y_i \in \{0, 1\}^+.$$

Frage: Gibt es eine nicht-leere Folge $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$x_{i_1} \dots x_{i_k} = y_{i_1} \dots y_{i_k}.$$

Eine gegebene Folge von Wortpaaren ist eine **PCP-Instanz** K .

Eine Folge von Indizes i_1, \dots, i_k , die obiger Gleichheit genügt, heißt

Lösung der Instanz K .

Satz 4.36 (Post 1946)

*PCP ist **vollständig** in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme, also*

- (a) *PCP ist semi-entscheidbar und*
- (b) *jedes semi-entscheidbare Problem besitzt eine many-one Reduktion auf PCP. Insbesondere ist PCP also **unentscheidbar**.*

Untere Schranke für Allgemeingültigkeit (Fort.)

Satz 4.37 (Church)

*Das Allgemeingültigkeitsproblem ist **hart** — und mit Satz 4.34 also **vollständig** — in der Klasse der semi-entscheidbaren Probleme.*

Korollar 4.38

Das Allgemeingültigkeitsproblem ist unentscheidbar.

Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik erster Stufe

Definition 4.39 (Semantik von Formelmengen)

Sei S eine Signatur, $\Sigma \subseteq FO(S)$, $\mathcal{M} = (D, I)$ und $\sigma \in D^V$.

- (i) Σ gilt in \mathcal{M} unter σ , in Zeichen $\mathcal{M}, \sigma \models \Sigma$, falls für alle $A \in \Sigma$ gilt $\mathcal{M} \llbracket A \rrbracket(\sigma) = 1$.
- (ii) Σ ist erfüllbar, falls es \mathcal{M} und σ gibt mit $\mathcal{M}, \sigma \models \Sigma$.

Satz 4.40 (Kompaktheitssatz)

Eine Formelmenge $\Sigma \subseteq FO(S)$ ist erfüllbar gdw. jede endliche Teilmenge von Σ erfüllbar ist.

Logische Folgerung

Definition 5.1 (Logische Folgerung)

Formel $A \in FO(S)$ ist eine **logische Folgerung** aus $\Sigma \subseteq FO(S)$, in Zeichen $\Sigma \models A$, falls für alle \mathcal{M} und σ gilt:

$$\mathcal{M}, \sigma \models \Sigma \quad \text{impliziert} \quad \mathcal{M}, \sigma \models A.$$

Die **Menge der Folgerungen** aus Σ ist

$$\text{Folg}(\Sigma) := \{A \in FO(S) \mid \Sigma \models A\}.$$

Formelmengen $\Sigma \subseteq FO(S)$ und $\Gamma \subseteq FO(S)$ sind **äquivalent**, in Zeichen $\Sigma \models\!\!\models \Gamma$, falls

$$\Sigma \models A \text{ für alle } A \in \Gamma \quad \text{und} \quad \Gamma \models B \text{ für alle } B \in \Sigma.$$

Logische Folgerung (Fort.)

Bemerkung 5.2

- (a) $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ nicht erfüllbar.
- (b) $\emptyset \models A$ gdw. $\models A$, also A ist allgemeingültig.
- (c) Σ nicht erfüllbar gdw. $\Sigma \models A$ für alle $A \in FO(S)$.
- (d) Falls $\Gamma \subseteq \Sigma$ und $\Gamma \models A$, dann $\Sigma \models A$.
- (e) Falls $\Gamma \models \Sigma$, dann ist Γ erfüllbar gdw. Σ erfüllbar ist.
- (f) Falls $\Gamma \models \Sigma$, dann $\text{Folg}(\Gamma) = \text{Folg}(\Sigma)$.
- (g) $A \models B$ gdw. $A \models B$ und $B \models A$ gdw. $\models A \leftrightarrow B$ gdw. $\mathcal{M}[A](\sigma) = \mathcal{M}[B](\sigma)$ für alle \mathcal{M}, σ .
- (h) Falls $A \models B$, dann $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \models B$.

Beispiel 5.3

i) $\forall xA \models A$

Spezialfall von $\forall xA \rightarrow A\{x/t\}$ allgemeingültig.

ii) Im Allgemeinen ist $A \models \forall yA$ mit $y \in FV(A)$ nicht gültig.

Sei $A \equiv p(y)$ und $\mathcal{M} = (\{0, 1\}, I)$ mit $I(p)(a) = 1$ gdw. $a = 0$.

Dann $\mathcal{M} \models \forall yA = 0$, betrachte $\{y/1\}$.

iii) $\models \exists x(p(x) \rightarrow \forall xp(x))$

Sei $\mathcal{M} = (D, I)$. Es gilt $\mathcal{M} \models \exists x(p(x) \rightarrow \forall xp(x)) = 1$, falls

es gibt $d \in D$ mit $I(p)(d) = 0$ oder

für alle $d \in D$ gilt $I(p)(d) = 1$.

Eines von beiden gilt.

iv) $\forall x(A \rightarrow B) \models \forall xA \rightarrow \forall xB$

Logische Folgerung (Fort.)

Satz 5.4 (Wichtige Sätze)

Seien $\Gamma \subseteq FO(S)$ und $A, B \in FO(S)$.

Deduktionstheorem $\Gamma, A \models B$ gdw. $\Gamma \models A \rightarrow B$

Modus-Ponens-Regel $\Gamma \models A$ und $\Gamma \models A \rightarrow B$, dann $\Gamma \models B$

Kontrapositionsregel $\Gamma, A \models \neg B$ gdw. $\Gamma, B \models \neg A$

Generalisierungstheorem

Kommt $x \in V$ in keiner Formel von Γ frei vor, dann

$\Gamma \models A$ gdw. $\Gamma \models \forall x A$

Insbesondere: $A \models \forall x A$ bzw. $\models A \rightarrow \forall x A$,

falls x nicht frei in A vorkommt.

Logische Folgerung (Fort.)

Beispiel 5.5 (Anwendung der Sätze)

- a) $\models \exists x \forall y A \rightarrow \forall y \exists x A$
gdw. $\exists x \forall y A \models \forall y \exists x A$ Deduktionstheorem
gdw. $\exists x \forall y A \models \exists x A$ Generalisierungstheorem
gdw. $\neg \forall x \neg \forall y A \models \neg \forall x \neg A$ Bemerkung 5.2 (logische Äquivalenz)
gdw. $\forall x \neg A \models \forall x \neg \forall y A$ Kontrapositionsregel
gdw. $\forall x \neg A \models \neg \forall y A$ Generalisierungstheorem
gdw. $\{\forall x \neg A, \forall y A\}$ nicht erfüllbar

b) Variante von Kongruenz

A' entstehe aus A durch erlaubte (beachte Quantoren) Ersetzung einiger Vorkommen von x durch y . Dann gilt

$$\models \forall x \forall y (x = y \rightarrow (A \leftrightarrow A')).$$

Beispiel: $\forall x \forall y (x = y \rightarrow (f(x, y) = g(x) \leftrightarrow f(y, y) = g(x)))$

Das deduktive System \mathcal{F}

Ziel: Konstruiere ein geeignetes deduktives System $\mathcal{F}(Ax, R)$ für die Prädikatenlogik erster Stufe.

Geeignet: Korrektheit (\Rightarrow) und **Vollständigkeit** (\Leftarrow)

$$\begin{array}{l} \vdash_{\mathcal{F}} A \quad \text{gdw.} \quad \models A \\ \Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A \quad \text{gdw.} \quad \Sigma \models A \end{array}$$

Die Definition von System \mathcal{F} zusammen mit dem Beweis der Vollständigkeit ist ein großer Beitrag von **Kurt Gödel (1906 — 1978)**.

Das deduktive System \mathcal{F} (Fort.)

Sei $FO_0(S)$ die Teilmenge der Formeln aus $FO(S)$ über $\neg, \rightarrow, \forall, =$.

Definition 5.6 (Deduktive Systeme)

Das **deduktive System** $\mathcal{F}(Ax, R)$ für $FO_0(S)$ besteht aus den Axiomen, die als Generalisierungen der durch folgende Schemata beschriebenen Formeln gewonnen werden können:

Ax1: Aussagenlogische Tautologien

Ax2: $\forall x A \rightarrow A\{x/t\}$

Ax3: $\forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (\forall x A \rightarrow \forall x B)$

Ax4: $A \rightarrow \forall x A$, falls $x \notin FV(A)$

Ax5: $x = x$

Ax6: $x = y \rightarrow (A \rightarrow A')$, wobei A' aus A durch Ersetzen einiger freier Vorkommen von x durch y entsteht (sofern erlaubt).

Das einzige Regelschema ist **Modus Ponens**:
$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Das deduktive System \mathcal{F} (Fort.)

Definition 5.7 (und Bemerkung)

Seien $A \in FO(S)$ und $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq FV(A)$. Die Formel

$$\forall x_1 \dots \forall x_n. A$$

ist eine **Generalisierung** von A .

Mit Satz 2.13 lassen sich alle **aussagenlogischen Tautologien** aus drei Axiomenschemata mit Modus Ponens herleiten.

Deduktionstheorem und Generalisierungstheorem

Satz 5.8

Seien $\Gamma \subseteq FO(S)$ und $A, B \in FO(S)$.

a) Deduktionstheorem

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} A \rightarrow B \quad \text{gdw.} \quad \Gamma, A \vdash_{\mathcal{F}} B$$

b) Generalisierungstheorem:

Falls $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} A$ und x nicht frei in Γ vorkommt, so $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \forall x A$

c) Kontrapositionstheorem:

$$\Gamma, A \vdash \neg B \quad \text{gdw.} \quad \Gamma, B \vdash \neg A.$$

Es gelten also für System \mathcal{F} die für das deduktive System \mathcal{F}_0 der Aussagenlogik bekannten Sätze.

Definition 5.9

Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq FO(S)$ heißt **konsistent**, falls es kein $A \in FO(S)$ gibt mit $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} A$ und $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} \neg A$.

Bemerkung 5.10

- Γ ist konsistent gdw. jede endliche Teilmenge von Γ konsistent ist.
- Ist Γ inkonsistent, dann gilt $\Gamma \vdash_{\mathcal{F}} A$ für jede Formel A .
- Gilt $\Gamma \vdash A$, dann ist $\Gamma \cup \{\neg A\}$ inkonsistent.
- Ist Γ inkonsistent, so ist Γ nicht erfüllbar.
- Die Menge der allgemeingültigen Formeln ist konsistent.
- Die Menge der Theoreme von \mathcal{F} ist konsistent.

Das deduktive System \mathcal{F} (Fort.)

Satz 5.11 (Korrektheit und Vollständigkeit von \mathcal{F} , Gödel)

Seien $A \in FO(S)$ und $\Sigma \subseteq FO(S)$, dann gilt:

- a) $\vdash_{\mathcal{F}} A$ gdw. $\models A$.
- b) $\Sigma \vdash_{\mathcal{F}} A$ gdw. $\Sigma \models A$.
- c) Σ konsistent gdw. Σ erfüllbar.

Der Satz der Prädikatenlogik!

Beweis:

Korrektheit: Ax enthält nur allgemeingültige Formeln und (MP) führt nicht aus der Menge der allgemeingültigen Formeln hinaus.

Vollständigkeit: Siehe Enderton. ■

Theorien erster Stufe

Betrachte **geschlossene Formeln** aus $FO_{abg}(S)$.

Definition 5.12

Sei S eine Signatur. Eine Formelmenge $\Gamma \subseteq FO_{abg}(S)$ heißt **Theorie erster Stufe**, falls Γ abgeschlossen gegenüber logischer Folgerung ist:

$$A \in FO_{abg}(S) \quad \text{und} \quad \Gamma \models A \quad \text{impliziert} \quad A \in \Gamma.$$

Nutze T als Bezeichner für Theorien.

Alternative Definitionen in der Literatur:

- Γ Menge an **Formeln** aus $FO(S)$ anstatt $FO_{abg}(S)$, abgeschlossen gegen logische Folgerung.
- Γ Theorie, falls Γ abgeschlossen gegen MP und Generalisierung.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Bemerkung 5.13

Sei S eine Signatur.

- a) $T_S = \{A \in FO_{abg}(S) \mid A \text{ allgemeing\"ultig}\}$ ist eine Theorie.
- b) Sei $\Sigma \subseteq FO_{abg}(S)$. Dann ist $T_\Sigma = \{A \in FO_{abg}(S) \mid \Sigma \models A\}$ die **von Σ erzeugte Theorie** oder durch die Axiome Σ definierte Theorie.
- c) Sei \mathcal{M} eine Struktur der Signatur S . Dann ist

$$T_{\mathcal{M}} = \{A \in FO_{abg}(S) \mid \mathcal{M} \models A\}$$

die **Theorie von \mathcal{M}** . Es ist auch $Th(\mathcal{M})$ als Symbol üblich.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Lemma 5.14 (und Definition)

(i) Ist T eine Theorie und $A \in FO_{abg}(S)$, dann gilt

$$T \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A \quad \text{gdw.} \quad A \in T.$$

(ii) Theorie T heißt **inkonsistent**, falls es eine Formel $A \in FO_{abg}(S)$ gibt mit $T \underset{\mathcal{F}}{\vdash} A$ und $T \underset{\mathcal{F}}{\vdash} \neg A$. In dem Fall gilt $T = FO_{abg}(S)$.

(iii) $T_{\mathcal{M}}$ ist **konsistent** für jede Struktur \mathcal{M} .

(iv) T_S ist in jeder Theorie über S enthalten.

Theorien erster Stufe (Forts.)

Definition 5.15

Sei T eine Theorie erster Stufe über Signatur S .

- a) T heißt **vollständig**, falls für jede Formel $A \in FO_{abg}(S)$ gilt:
 $A \in T$ oder $\neg A \in T$.
- b) T heißt **(endlich, aufzählbar) axiomatisierbar**, falls es eine
(endliche, aufzählbare) Teilmenge $\Sigma \subseteq FO_{abg}(S)$ gibt mit

$$T_{\Sigma} = T.$$

- c) T heißt **entscheidbar**, falls T eine entscheidbare Teilmenge von
 $FO_{abg}(S)$ ist.

Bemerkung 5.16

- (a) $T_{\mathcal{M}}$ ist **vollständig** für jede Struktur \mathcal{M} .
Mit Lemma 5.14 ist $T_{\mathcal{M}}$ also konsistent und vollständig.
- (b) T ist erfüllbar gdw. T ist konsistent.
- (c) Ist T aufzählbar axiomatisierbar, dann ist T aufzählbar.
- (d) Ist T vollständig und aufzählbar axiomatisierbar, dann ist T **entscheidbar**.
- (e) Ist T vollständig und konsistent, dann $T = T_{\mathcal{M}}$ für eine Struktur \mathcal{M} .

Axiomatisierung

Ziel: Finde Axiomatisierungen wichtiger Theorien.

Insbesondere: Wann gilt $T_{\mathcal{M}} = T_{\Sigma}$ für Σ **aufzählbar**.

Motivation: Entscheidbarkeit!

Problem: Wann ist T_{Σ} vollständig für aufzählbare Σ ?

Axiomatisierung (Presburger)

Betrachte die Signatur der Arithmetik **ohne Multiplikation**:

$$S_{PA} = (\{0/0, 1/0, +/2\}, \{=/2\}).$$

Die zugehörige Struktur $\mathcal{M}_{PA} = (\mathbb{N}, I_{PA})$ mit der erwarteten Interpretation wird **Presburger-Arithmetik** genannt.

Sei Σ_{PA} die Menge der folgenden Axiome, mit (Induktion) ein Schema:

$$\forall x : \neg(x + 1 = 0) \quad (\text{Null})$$

$$\forall x : x + 0 = x \quad (\text{Plus Null})$$

$$\forall x \forall y : x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \quad (\text{Nachfolger})$$

$$\forall x \forall y : x + (y + 1) = (x + y) + 1 \quad (\text{Plus Nachfolger})$$

$$A(0) \wedge (\forall x : A(x) \rightarrow A(x + 1)) \rightarrow \forall x : A(x), \quad (\text{Induktion})$$

wobei $A \in FO(S_{PA})$ eine Formel mit einer freien Variablen ist.

Axiomatisierung (Presburger)

Satz 5.17 (Vollständige Axiomatisierung der Presburger-Arithmetik)

Es gilt $T_{\mathcal{M}_{PA}} = T_{\Sigma_{PA}}$. Da Σ_{PA} aufzählbar ist, ist $T_{\mathcal{M}_{PA}}$ **entscheidbar**.

Vollständigkeit der Axiomatisierung ist anspruchsvoll.

Entscheidbarkeit folgt mit Bemerkung 5.16(d).

Es lassen sich also geschlossene Formeln aus $FO(S_{PA})$ **automatisch** auf Gültigkeit in Presburger-Arithmetik prüfen.

Zum Beispiel:

$$\forall w \forall x \exists y \exists z : x + 2y + 3w = z + 13 \quad ?$$

Man beachte die Quantoren und vergleiche mit Gauß-Elimination.

Axiomatisierung (Gödel und Peano)

Betrachte die Signatur der vollen Arithmetik:

$$S_{Arith} = (\{0/0, 1/0, +/2, \cdot/2\}, \{=/2\}).$$

Die zugehörige Struktur $\mathcal{M}_{Arith} = (\mathbb{N}, I_{Arith})$ mit der erwarteten Interpretation wird **(First-Order-)Arithmetik** genannt.

Satz 5.18 (Gödel)

$T_{\mathcal{M}_{Arith}}$ ist nicht entscheidbar.

Konsequenz 1: $T_{\mathcal{M}_{Arith}}$ ist **nicht** aufzählbar axiomatisierbar.

Konsequenz 2: Jedes aufzählbare Axiomensystem für $T_{\mathcal{M}_{Arith}}$ ist **unvollständig**.

Die Konsequenzen ergeben sich aus Bemerkung 5.16(a) und (d).

Axiomatisierung (Gödel und Peano)

Insbesondere sind die Peano-Axiome Σ_{Peano} **keine** vollständige Axiomatisierung von $T_{\mathcal{M}_{Arith}}$:

$$\forall x : \neg(x + 1 = 0) \quad (\text{Null})$$

$$\forall x : x + 0 = x \quad (\text{Plus Null})$$

$$\forall x \forall y : x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y \quad (\text{Nachfolger})$$

$$\forall x \forall y : x + (y + 1) = (x + y) + 1 \quad (\text{Plus Nachfolger})$$

$$A(0) \wedge (\forall x : A(x) \rightarrow A(x + 1)) \rightarrow \forall x : A(x) \quad (\text{Induktion})$$

$$\forall x : x \cdot 0 = 0 \quad (\text{Mal Null})$$

$$\forall x \forall y : x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x \quad (\text{Mal Nachfolger})$$

Es gibt also geschlossene Formeln $A \in FO(S_{Arith})$ mit $\mathcal{M}_{Arith} \models A$, für die $\Sigma_{Peano} \models A$ **nicht** gilt.

Wie kann das sein? $T_{\Sigma_{Peano}}$ besitzt **Nicht-Standard-Modelle!**

Axiomatisierung (Arrays)

Gegeben seien Funktionen für Lese- und Schreibzugriffe auf Arrays:

$$S_{McC} = (\{\text{read}/_2, \text{write}/_3\}, \{=/_2\}).$$

Betrachte **McCarthys Array-Axiome** Σ_{McC} :

$$\forall x : x = x \quad (\text{Reflexivität})$$

$$\forall x \forall y : x = y \rightarrow y = x \quad (\text{Symmetrie})$$

$$\forall x \forall y \forall z : x = y \wedge y = z \rightarrow x = z \quad (\text{Transitivität})$$

$$\forall a \forall i \forall j : i = j \rightarrow \text{read}(a, i) = \text{read}(a, j) \quad (\text{Array-Kongruenz})$$

$$\forall a \forall v \forall i \forall j : i = j \rightarrow \text{read}(\text{write}(a, i, v), j) = v \quad (\text{Read-Write 1})$$

$$\forall a \forall v \forall i \forall j : i \neq j \rightarrow \text{read}(\text{write}(a, i, v), j) = \text{read}(a, j). \quad (\text{Read-Write 2})$$

Satz 5.19

$T_{\Sigma_{McC}}$ ist **nicht entscheidbar**, insbesondere also **nicht vollständig**.

Entscheidbare Fragmente sind aktives Forschungsgebiet, Aaron Bradley'06.

Algorithmen der Prädikatenlogik

Ziel: **Praktische** Semi-Entscheidungsverfahren für Unerfüllbarkeit.

Anwendungen:

Allgemeingültigkeit: $\models A$ gdw. $\neg A$ unerfüllbar.

Logische Folgerung: $\Sigma \models A$ gdw. $\Sigma \cup \{\neg A\}$ unerfüllbar.

Idee: Systematische Version des Algorithmus von Gilmore.

Erzeuge gezielt Grundformeln, um Widersprüche herzuleiten.

Semantische Tableaus

Betrachte geschlossene Formeln in $FO^{\neq}(S)$, also Formeln ohne $=$.

Definition 6.1

Formeln aus $FO^{\neq}(S)$ lassen sich in Klassen einteilen:

- (Negierte) atomare Formeln: $p(t_1, \dots, t_n), \neg p(t_1, \dots, t_n)$.
- α -Formeln: $A \wedge B, \neg(A \vee B), \neg(A \rightarrow B), \neg\neg A$.
- β -Formeln: $\neg(A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B)$.
- γ -Formeln: $\forall x A, \neg\exists x A$.
- δ -Formeln: $\exists x A, \neg\forall x A$.

Semantische Tableaus (Fort.)

Tableau-Konstruktion:

α, β -Formeln: Wie gehabt.

γ -Formeln:

$$\frac{\gamma \quad \forall x A \quad \neg \exists x A}{\gamma[t] \quad A\{x/t\} \quad \neg A\{x/t\}},$$

wobei t ein Grundterm ist, also keine Variablen enthält.

δ -Formeln:

$$\frac{\delta \quad \exists x A \quad \neg \forall x A}{\delta[c] \quad A\{x/c\} \quad \neg A\{x/c\}},$$

wobei c eine Funktionskonstante und **frisch für den Ast** ist.

Semantische Tableaus (Fort.)

Bemerkung zur Konstruktion:

δ -Formeln Müssen **nur einmal** "erfüllt" werden.

Lösungen von δ -Formeln dürfen nicht eingeschränkt werden:
ein x mit Eigenschaft A muss nicht als y mit Eigenschaft B funktionieren.

γ -Formeln Müssen **für alle Objekte**, die eingeführt werden, gelten.
Werden also **immer weiter** betrachtet.

Intuition: Systematische Konstruktion eines **Herbrand-Modells**:

- δ -Formeln werden mit **Skolemisierung** behandelt.
Führe soviele Konstanten ein, wie notwendig ist.
- Wähle als Datenbereich die **Terme über den Konstanten**.
- Falls die Signatur keine Funktionssymbole enthält,
sind das gerade die Konstanten.

Semantische Tableaus (Fort.)

Die Beweise von **Korrektheit** und **Vollständigkeit** sind analog zum Fall der Aussagenlogik.

Lemma 6.2

Sei $A \in FO^{\neq}(S)$ geschlossen und τ ein Tableau für A . Dann gilt

A ist erfüllbar gdw. $\exists \text{ Ast } \Gamma \in \tau : \Gamma \text{ ist erfüllbar.}$

Semantische Tableaus (Fort.)

Definition 6.3

Eine Menge geschlossener Formeln $\Gamma \subseteq FO(S)$ heißt **vollständig**, falls

- 1 für jede α -Formel in Γ gilt $\alpha_1, \alpha_2 \in \Gamma$
- 2 für jede β -Formel in Γ gilt $\beta_1 \in \Gamma$ oder $\beta_2 \in \Gamma$
- 3 für jede γ -Formel in Γ gilt $\gamma[t] \in \Gamma$ für alle $t \in D_{\mathcal{H}(S)}$
- 4 für jede δ -Formel in Γ gibt es ein $t \in D_{\mathcal{H}(S)}$ mit $\delta[t] \in \Gamma$.

Die Menge heißt **abgeschlossen**, falls es ein $B \in FO(S)$ gibt mit $B, \neg B \in \Gamma$. Sonst heißt Γ **offen**.

Beachte: Eingeführte Konstanten sind in der Signatur S und somit auch in den Termen $D_{\mathcal{H}(S)}$ enthalten.

Lemma 6.4 (Hintikka)

Sei $\Gamma \subseteq FO^{\neq}(S)$ vollständig. Dann ist Γ erfüllbar gdw. Γ offen ist.

Semantische Tableaus (Fort.)

Satz 6.5

Seien $A \in FO(S)$ und $\Sigma \subseteq FO(S)$.

- a) $\models A$ gdw. es gibt ein abgeschlossenes Tableau für $\neg A$.
- b) $\Sigma \models A$ gdw. es gibt ein abgeschlossenes Tableau für $\Sigma \cup \{\neg A\}$.

Eine **systematische Tableau-Konstruktion** garantiert, dass alle Äste vollständig sind (ggf. unendlich).

Idee einer systematischen Tableau-Konstruktion: 

Mit der Annahme einer systematischen Tableau-Konstruktion erhält man ein **Semi-Entscheidungsverfahren** für Allgemeingültigkeit.

Satz 6.6

Falls $A \in FO(S)$ allgemeingültig ist, wird von der systematischen Tableau-Konstruktion ein geschlossenes Tableau für $\neg A$ erstellt.

Semantische Tableaus (Fort.)

Tableaus sind **kein Entscheidungsverfahren** für Allgemeingültigkeit.

Siehe **Unentscheidbarkeit** in Satz 4.37.

Da das Verfahren korrekt und vollständig ist, **terminiert es ggf. nicht**.

$D_{\mathcal{H}(S)}$ kann unendlich sein: Funktionssymbole.

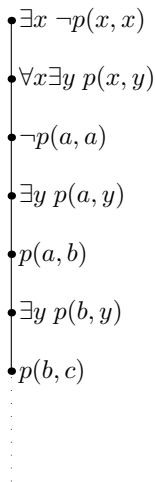
Heuristik zur Konstruktion endlicher Modelle:

Weiche Forderung **frisch** bei δ -Formeln auf.

- Erst existierende Konstanten verwenden.
- Falls diese Wahl zu Widersprüchen führt, führe neue Konstanten ein.
- Sonst Modell gefunden.

Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten

Gibt es Modelle für $\{\exists x \neg p(x, x), \forall x \exists y p(x, y)\}$?



Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten (Fort.)

Verwende Konstante a wieder:

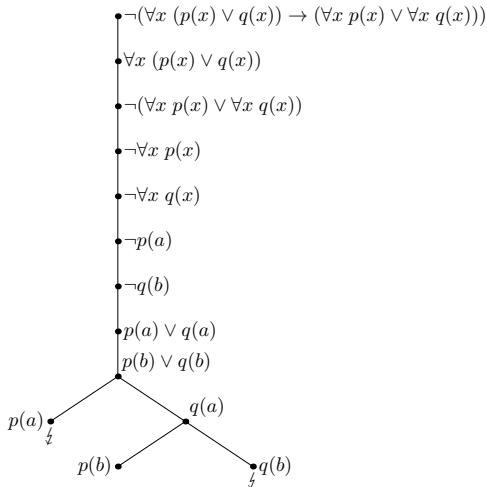
- $\exists x \neg p(x, x)$
- $\forall x \exists y p(x, y)$
- $\neg p(a, a)$
- $\exists y p(a, y)$
- $p(a, b)$
- $\exists y p(b, y)$
- $p(b, a)$

Es gibt also eine Struktur mit zwei Elementen $\{a, b\}$, die Modell ist.
Interpretation des Prädikats:

$p(x, y)$	a	b
a	0	1
b	1	*

Beispiele zur Wiederverwendung von Konstanten (Fort.)

Gilt $\models \forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \vee \forall x q(x))$?



$$\mathcal{M} = (\{a, b\}, \quad I(p)(a) = I(q)(b) = 0, \quad I(p)(b) = I(q)(a) = 1)$$

Idee prädikatenlogischer Resolution

Ziel: **Praktisches** Semi-Entscheidungsverfahren für Unerfüllbarkeit basierend auf dem **Algorithmus von Gilmore**:

Um Unerfüllbarkeit von $A \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n. B \in FO(S)$ in Skolemform zu zeigen, zeige Unerfüllbarkeit der Herbrand-Expansion $E(A)$.

Beispiel: Sei $A \equiv \forall x. p(x) \wedge \neg p(f(x))$ über $S = (\{a/0, f/1\}, \{p/1\})$.
Dann

$$E(A) = \{p(a) \wedge \neg p(f(a)), p(f(a)) \wedge \neg p(f(f(a))), \dots\}.$$

Kernbeobachtung: Da $A \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n. B$ mit B in **KNF**, lässt sich Unerfüllbarkeit von $E(A)$ mittels **aussagenlogischer Resolution** prüfen:

$$\begin{array}{cccc} \{p(a)\} & \{\neg p(f(a))\} & \{p(f(a))\} & \{\neg p(f(f(a)))\} \\ & \swarrow & \nwarrow & \\ & \sqcup & & \end{array}$$

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Beobachtung: Bereits die Substitutionen $\{x/a\}$ und $\{x/f(a)\}$ liefern unerfüllbare Formelmenge.

Es werden aber schon zwei Klauseln generiert, die für die Herleitung der leeren Klausel \sqcup **nicht benötigt werden**.

Idee: Generiere geeignete Substitution für jede Klausel in B — **individuell**.
Wende die Substitution nur auf diese Klausel an, nicht auf ganz B .

Am Beispiel:

Klauseln in B	$\{p(x)\}$	$\{\neg p(f(x))\}$
Grundsubstitutionen	$\downarrow \{x/f(a)\}$	$\downarrow \{x/a\}$
Entsprechende Grundinstanzen der Klauseln in B	$\{p(f(a))\}$	$\{\neg p(f(a))\}$
	\searrow	\swarrow
	\sqcup	

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Problem: Algorithmische Suche nach Grundinstanzen zur Herleitung der leeren Klausel \square .

- Systematisches Probieren der Grundsubstitutionen — **aufwendig**.
- Vorausschauende Entscheidung für Grundsubstitutionen, damit später benötigte Resolutionen möglich — **schwierig**.

Ansatz: Führe Substitutionen **zurückhaltend** aus — nur sofern sie für den nächsten Resolutionsschritt notwendig sind.

Am Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} \{p(x), \neg q(g(x))\} & & \{\neg p(f(y))\} \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \{x/f(y)\} \\ & & \{\neg q(g(f(y)))\} \end{array}$$

Idee prädikatenlogischer Resolution (Fort.)

Am Beispiel:

$$\begin{array}{ccc} \{p(x), \neg q(g(x))\} & & \{\neg p(f(y))\} \\ & \searrow & \swarrow \\ & & \{x/f(y)\} \\ & & \{ \neg q(g(f(y))) \} \end{array}$$

Was passiert?

Erzeuge **prädikatenlogische Resolvente** aus prädikatenlogischen Klauseln.

Resolutionsschritt kommt **mit Substitution**, die Literale in Ausgangsklauseln komplementär macht.

Führe Substitutionen zurückhaltend aus, kein Anlass für Grundsubstitutionen.

Unifikation

Ziel: Berechne **Unifikator** — eine Substitution, die eine Menge von Literalen identisch macht.

Am Beispiel: Für $\{p(x), p(f(y))\}$ sind

$$\Theta_1 = \{x/f(y)\} \quad \text{und} \quad \Theta_2 = \{x/f(a), y/a\}$$

Unifikatoren. Aber Θ_2 substituiert **mehr als notwendig**.

Definition 6.7 (Unifikator)

Eine Substitution $\Theta : \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{t_1, \dots, t_n\}$ ist **Unifikator einer Menge von Literalen** $\{L_1, \dots, L_n\}$, falls

$$L_1\Theta \equiv \dots \equiv L_n\Theta.$$

Existiert Θ , heißt die Literalmenge **unifizierbar**.

Unifikation (Fort.)

Definition 6.7 (Unifikator (Fort.))

Ein Unifikator Θ von $\{L_1, \dots, L_n\}$ heißt **allgemeinster Unifikator**, falls für jeden Unifikator Θ' von $\{L_1, \dots, L_n\}$ eine Substitution $\tilde{\Theta}$ existiert, so dass

$$\Theta' = \Theta\tilde{\Theta}.$$

Anschaulich gilt mit einem allgemeinsten Unifikator:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\Theta} & A\Theta \\ \Theta' \searrow & & \downarrow \tilde{\Theta} \\ & & A\Theta' \equiv A\Theta\tilde{\Theta} \end{array} \quad \text{für jede Formel } A \in FO(S).$$

Satz 6.8 (Unifikation, Robinson)

Jede unifizierbare Menge von Literalen besitzt einen allgemeinsten Unifikator.

Unifikationsalgorithmus

Input: $\{L_1, \dots, L_n\}$.

$\Theta := \{\}$

while $\exists i, j : L_i\Theta \neq L_j\Theta$ **do**

Durchsuche Literale $L_1\Theta, \dots, L_n\Theta$ von links nach rechts,
bis erste Position gefunden, an der $L_k\Theta \neq L_m\Theta$.

if keines der Zeichen Variable **then**

return nicht unifizierbar

end if

let x = die Variable

let t = der Term in dem anderen Literal

if $x \in V(t)$ **then**

//Occur-Check

return nicht unifizierbar

end if

$\Theta := \Theta\{x/t\}$

end while

return Θ

Bei positiver Terminierung ist Θ ein **allgemeinster Unifikator**.

Resolution

Definition 6.9 (Resolvente)

Seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln mit disjunkten Variablen. Falls es Literale $L_1, \dots, L_m \in K_1$ und $L'_1, \dots, L'_n \in K_2$ gibt, so dass

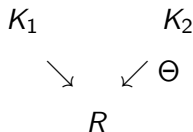
$$\{\overline{L_1}, \dots, \overline{L_m}, L'_1, \dots, L'_n\}$$

unifizierbar ist mit allgemeinstem Unifikator Θ , dann heißt

$$R := ((K_1 \setminus \{L_1, \dots, L_m\}) \cup (K_2 \setminus \{L'_1, \dots, L'_n\}))\Theta$$

prädikatenlogische Resolvente von K_1 und K_2 .

Notation: $K_1, K_2 \stackrel{Res}{\vdash} R$ oder



Bemerkung: Aussagenlogische Resolution ist ein Spezialfall mit $m = n = 1$ und $\Theta = \{\}$.

Resolution (Fort.)

Am Beispiel:

$$\{p(f(x)), \neg q(z), p(z)\}$$



$$\{\neg q(f(x)), r(g(f(x)), a)\}$$

$$\{\neg p(y), r(g(y), a)\}$$

$$\swarrow \Theta = \{z/f(x), y/f(x)\}$$

Satz 6.10 (Korrektheit und Widerlegungsvollständigkeit, Robinson)

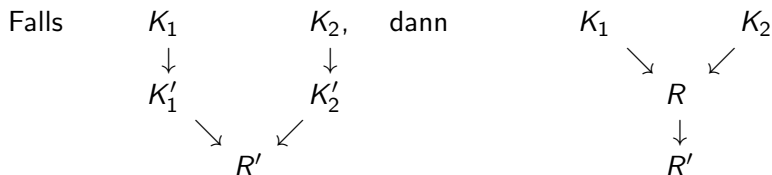
Sei $A \equiv \forall x_1 \dots \forall x_n. B \in FO(S)$ geschlossen und in Skolemform mit B in KNF. Dann ist A unerfüllbar gdw. $B \underset{Res}{\vdash} \perp$.

Beachte: Das Verfahren muss nicht terminieren.
Unerfüllbarkeit ist **unentscheidbar**.

Zum Beweis der Widerlegungsvollständigkeit

Beweisansatz: Reduziere prädikatenlogische Resolution auf (aussagenlogische) Grundresolution (oben vorgestellt).

Technik: Aussagenlogische Resolutionen von Grundinstanzen können **geliftet** werden in prädikatenlogische Resolutionen:



Lemma 6.11 (Lifting-Lemma)

Seien K_1, K_2 prädikatenlogische Klauseln und K'_1, K'_2 Grundinstanzen mit aussagenlogischer Resolvente R' .

Dann gibt es eine prädikatenlogische Resolvente R aus K_1, K_2 , so dass R' Grundinstanz von R ist.