

Übungen zur Vorlesung
Einführung in die Logik
Blatt 1

Prof. Dr. Roland Meyer,
Sören van der Wall

Abgabe bis Do, 28. Mai 2020 um 23:59

Aufgabe 1.1 (Axiom, Definition, Satz, Lemma, Korollar — 1 + 1 + 1 = 3Pkt)

Diese Begriffe werden Ihnen während des Studiums stets begegnen.

- Beschreiben Sie mit einem bis zwei Sätzen die Bedeutung eines Axioms, einer Definition, eines Satzes, eines Lemmas und eines Korollars.
- Definieren Sie eine Funktion für den größten gemeinsamen Teiler zweier Zahlen.
- Nehmen Sie an, Sie hätten einen Algorithmus $Alg(a, b)$ geschrieben, der den größten gemeinsamen Teiler berechnet. Formulieren Sie einen Satz, der besagt, dass ihr Algorithmus den korrekten Wert berechnet.

Aufgabe 1.2 (Strukturelle Induktion — 10Pkt)

Die Tiefe $t(A)$ einer aussagenlogischen Formel A ist wie folgt definiert.

- Ist A eine atomare Formel, so ist $t(A) = 0$.
- Ist $A = (B * C)$ für einen binären Junktor $*$, so gilt $t(A) = \max\{t(B), t(C)\} + 1$.
- Ist $A = (\neg B)$, so definieren wir $t(A) = t(B) + 1$.

Außerdem sei $|A|$ die Länge der Formel A , d.h. die Anzahl der Zeichen in A (Klammern und Junktoren zählen also mit). Beweisen Sie mit struktureller Induktion über den Aufbau der aussagenlogischen Formeln, dass in jeder vollständig geklammerten aussagenlogischen Formel A

- die Anzahl der öffnenden und schließenden Klammern übereinstimmt.
- $|A| \leq 5k + 1$, wobei k die Anzahl der Junktoren in A ist.
- $|A| \leq 4 \cdot 2^{t(A)} - 3$.

Aufgabe 1.3 (Deduktionstheorem, zweite Richtung — **10Pkt**)

In der Vorlesung haben Sie das Deduktionstheorem

$$\Sigma, A \vDash B \quad \text{g.d.w.} \quad \Sigma \vDash (A \rightarrow B)$$

gesehen und

$$\Sigma, A \vDash B \quad \Rightarrow \quad \Sigma \vDash (A \rightarrow B)$$

gezeigt. Zeigen Sie dass die umgekehrte Richtung ebenfalls gilt, i.e.

$$\Sigma, A \vDash B \quad \Leftarrow \quad \Sigma \vDash (A \rightarrow B).$$

Aufgabe 1.4 (Endliche Erfüllbarkeit — **5Pkt**)

Seien $\Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \dots$ endlich erfüllbare Formelmengen.

Zeigen Sie: $\Sigma = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Sigma_i$ ist auch endlich erfüllbar.

Aufgabe 1.5 (Abzählbarkeit von Formeln — **5 + 5 + 6 + 6 = 22Pkt**)

Eine Menge M heißt abzählbar, falls eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ existiert, d.h. für alle $m \in M$ gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodass $f(n) = m$. In dem Fall schreibt man häufig auch $M = \{m_0, m_1, \dots\}$ oder $(m_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Im Beweis des Kompaktheitssatzes gingen wir davon aus, dass die Menge F aller Formeln aufzählbar ist. Wir wollen dies beweisen. Dazu definieren wir: Die Strukturtiefe $t(A)$ einer Formel A wie in Aufgabe 1 und die vorkommenden Variablen $v(A)$ in einer Formel A , d.h.

$$\begin{aligned} v(A) &= \{A\} \quad \text{wenn } A \text{ eine Variable ist} \\ v(\neg A) &= v(A) \quad \text{und} \\ v(A * B) &= v(A) \cup v(B). \end{aligned}$$

- Zeigen Sie: Wenn eine Menge M von einer abzählbaren Menge von endlichen Mengen $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$ abgedeckt wird, d.h. $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$, dann ist M abzählbar.
- Zeigen Sie: Die Menge $F_{t, \mathcal{V}} = \{A \in F \mid t(A) \leq t \text{ und } v(A) \subseteq \mathcal{V}\}$ aller Formeln mit maximaler Strukturtiefe t und Variablen in $\mathcal{V} \subseteq_{\text{fin}} V$ ist endlich (\subseteq_{fin} besagt, dass die Teilmenge \mathcal{V} endlich ist).

Hinweis: Induktion.

- Finden Sie eine abzählbare Menge von endlichen Variablenmengen $(\mathcal{V}_i)_{i \in \mathbb{N}}$, also $\mathcal{V}_i \subseteq_{\text{fin}} V$, sodass $V = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i$. Wählen Sie sie so, dass die Menge aller Formeln $F = \bigcup_{t, i \in \mathbb{N}} F_{t, \mathcal{V}_i}$ abgedeckt wird. Beweisen Sie diese Gleichheit.

Hinweis: Was wissen Sie über V , die Menge aller Variablen?

- Finden Sie eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \{F_{t, \mathcal{V}_i} \mid t, i \in \mathbb{N}\}$. (Sie müssen die Funktion nicht formal angeben. Die Idee genügt.)

Abgabe bis Do, 28. Mai 2020 um 23:59 per Mail an Ihren Gruppenleiter.