Lemma 0:

Für jedes $A \in F_0$ gilt $\vdash A \to A$.

Beweis:

$$(\underbrace{A}_{A} \to (\underbrace{(A \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{C})) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$$ (Ax

(Ax

$$\underbrace{A}_{A} \to (\underbrace{(A \to A)}_{B} \to \underbrace{A}_{A})$$

(MP)

$$(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$$ (Ax 1.

$$\underbrace{A}_{A} \to (\underbrace{A}_{B} \to \underbrace{A}_{A})$$ (MP)

$$A \to A$$ □

Sat (Deduktionstheorem (Syntaktische Version)):

Sein $\Sigma \subseteq F_0$ und $A, B \in F_0$.

Dann gilt

$\Sigma, A \vdash B$ gdw. $\Sigma \vdash A \to B$.

Beweis:

„$\Leftarrow$" Gilt mit Modus-Ponens.

„$\Rightarrow$" Sei

$B_0 \; B_1 \; \dots \; B_m$

ein Beweis für $\Sigma, A \vdash B$, also $B \equiv B_m$.

Wir zeigen mittels (Noetherscher) Induktion nach der Anzahl m,

dass

$\Sigma \vdash A \to B_i$ für alle $0 \leq i \leq m$.

Dann folgt die Behauptung mit $B \equiv B_m$.

$\underset{i=0}{\text{IA}}$: 1. Fall $B_0 \equiv A$

Dann gilt $\Sigma \vdash A \to A$ mit Lemma 0.

2. Fall $B_0 \in Ax \cup \Sigma$

Dann folgt

$$\Sigma \vdash A \to B_0$$

mittels

$$B_0 \qquad \text{(Axiom } B_0 \in Ax \text{ oder Hypothese } B_0 \in \Sigma\text{,}$$

$$B_0 \to (A \to B_0) \qquad (Ax\,1)$$

$$A \to B_0 \qquad (MP).$$

IS: Angenommen die Aussage gilt für B_j, B_k mit $j, k < i$,
also

$$\Sigma \vdash A \to B_j \quad \text{und} \quad \Sigma \vdash A \to B_k.$$

Angenommen B_i entsteht aus B_j und B_k
durch Anwendung von (MP).
Das heißt insbesondere

$$B_k \equiv B_j \to B_i$$

(Falls B_j diese Form hat, analog.

Nun lässt sich

$$\Sigma \vdash A \to B_i$$

mit folgendem Beweis zeigen:

$$(A \to (B_j \to B_i)) \to ((A \to B_j) \to (A \to B_i)) \qquad (Ax\,2)$$

$$A \to (B_j \to B_i) \qquad (IH\ A \to B_k$$

$$(A \to B_j) \to (A \to B_i) \qquad (MP)$$

$$A \to B_j \qquad (IH\ A \to B_j$$

$$A \to B_i \qquad (MP)$$

□

Das Deduktionstheorem erleichtert das Finden von Beweisen.

Lemma 1:

$$\vdash (A \to B) \to ((B \to C) \to (A \to C))$$

Beweis:
Mit dem Deduktionstheorem genügt es,

$$A \to B,\ B \to C,\ A \vdash C$$

zu zeigen.

Der Beweis ist mit zweimaliger Anwendung von (MP) unmittelbar:

A	(Hypothese)
$A \to B$	(Hypothese)
B	(MP)
$B \to C$	(Hypothese)
C	(MP).

$\square$

<u>Lemma 2:</u>

$\vdash \neg B \to (B \to A)$

<u>Beweis:</u>

Mit dem Deduktionstheorem genügt es,

$\neg B \vdash B \to A$

zu zeigen:

$\neg B \to (\neg A \to \neg B)$	(Ax 1)
$\neg B$	(Hypothese)
$\neg A \to \neg B$	(MP)
$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	(Ax 3)
$B \to A$	(MP).

$\square$

<u>Lemma 3:</u>

$\vdash B \to \neg\neg B$

<u>Beweis:</u>

$\neg\neg(\neg B) \to \neg B$	(Beispiel 2.10)
$(\neg(\neg\neg B) \to \neg B) \to (B \to \neg\neg B)$	(Ax 3)
$B \to \neg\neg B$	(MP).

$\square$

<u>Lemma 4:</u>

$\vdash (A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$

Beweis:

Nutze das Deduktionstheorem und zeige

$$A \to B \vdash \neg B \to \neg A$$

Dazu leiten wir her, dass

$$A \to B \vdash \neg\neg A \to \neg\neg B \qquad (1)$$

Dann folgt der gewünschte Schluss mit

$$(\neg(\neg A) \to \neg(\neg B)) \to (\neg B \to \neg A) \qquad (Ax\ 3)$$

$$\neg\neg A \to \neg\neg B \qquad (\text{Aus } (1))$$

$$\neg B \to \neg A \qquad (MP).$$

Es bleibt (1) zu zeigen.

Zeige dazu mit dem Deduktionstheorem:

$$A \to B, \neg\neg A \vdash \neg\neg B.$$

Ein Beweis ist

$$\neg\neg A \to A \qquad (\text{Beispiel } 2.10)$$

$$\neg\neg A \qquad (\text{Hypothese})$$

$$A \qquad (MP)$$

$$A \to B \qquad (\text{Hypothese})$$

$$B \qquad (MP)$$

$$B \to \neg\neg B \qquad (\text{Lemma } 3)$$

$$\neg\neg B \qquad (MP).$$

□

Lemma 5:

$$\vdash B \to (\neg C \to \neg(B \to C))$$

Beweis:

Mit dem Deduktionstheorem genügt es, zu zeigen:

$$B \vdash \neg C \to \neg(B \to C).$$

Angenommen es ließe sich zeigen

$$B \vdash (B \to C) \to C \qquad (2).$$

Dann gilt der gewünschte Schluss mit

$$((B \to C) \to C) \to (\neg C \to \neg(B \to C)) \qquad \text{(Lemma 4)}$$
$$(B \to C) \to C \qquad \text{(Hyp (2))}$$
$$\neg C \to \neg(B \to C) \qquad \text{(MP)}.$$

Bleibt (2) zu zeigen.
Nutze dazu erneut das Deduktionstheorem:

$$B, B \to C \vdash C.$$

Der Beweis ist unmittelbar mit Modus-Ponens. □

Lemma E1:

$$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg Ax))$$

Beweis:

Zeige

$$A \to B,\ A \to \neg B,\ A \vdash \neg Ax$$

mittels

$$\neg B \to (B \to \neg Ax) \qquad \text{(Lemma 2)}$$
$$A \to \neg B \qquad \text{(Hypothese)}$$
$$A \qquad \text{(Hypothese)}$$
$$\neg B \qquad \text{(MP)}$$
$$B \to \neg Ax \qquad \text{(MP)}$$
$$A \to B \qquad \text{(Hypothese)}$$
$$B \qquad \text{(MP)}$$
$$\neg Ax \qquad \text{(MP)}.$$

□

Lemma E2:

$$\vdash (A \to \neg Ax) \to \neg A$$

Beweis:

Zeige $A \to \neg Ax \vdash \neg A$.

Ein Beweis ist

$(A \to \neg A_x) \to (\neg\neg A_x \to \neg A)$ (Lemma 4)

$A \to \neg A_x$ (Hypothese)

$\neg\neg A_x \to \neg A$ (MP)

$A_x \to \neg\neg A_x$ (Lemma 3)

A_x (Axiom)

$\neg\neg A_x$ (MP)

$\neg A$ (MP).

□

Lemma 6:

$\vdash (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$

Beweis:

Zeige

$A \to B,\ A \to \neg B \vdash \neg A$

durch

$(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to (A \to \neg A_x))$ (Lemma E1)

$A \to B$ (Hypothese)

$(A \to \neg B) \to (A \to \neg A_x)$ (MP)

$A \to \neg B$ (Hypothese)

$A \to \neg A_x$ (MP)

$(A \to \neg A_x) \to \neg A$ (Lemma E2)

$\neg A$ (MP).

□

Lemma 7:

$\vdash (B \to A) \to ((\neg B \to A) \to A)$

Beweis:

Zeige

$B \to A,\ \neg B \to A \vdash A$

durch

$(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$ (Lemma 4)

$B \to A$ (Hypothese)

$\neg A \to \neg B$ (MP)

$(\neg B \to A) \to (\neg A \to \neg\neg B)$ (Lemma 4)

$\neg B \to A$ (Hypothese)

$\neg A \to \neg\neg B$ (MP)

$(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A)$ (Lemma 6)

$(\neg A \to \neg\neg B) \to \neg\neg A$ (MP)

$\neg\neg A$ (MP)

$\neg\neg A \to A$ (Beispiel 2.10)

A (MP). $\square$