Beispiel (Davis-Putnam):

(1) Ist $\neg p \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)$ erfüllbar?

$$\neg p \vee ((p \wedge q) \wedge \neg r)$$

$p = 0$

$$1 \vee ((0 \wedge q) \wedge \neg r)$$

$\models 1 \vee (0 \wedge \neg r)$ ✓

$\models 1 \vee 0 \models 1$

(2) Ist $(\neg p \wedge q) \vee (\neg r \wedge p)$ erfüllbar?

$$(\neg p \wedge q) \vee (\neg r \wedge p)$$

$p = 0$

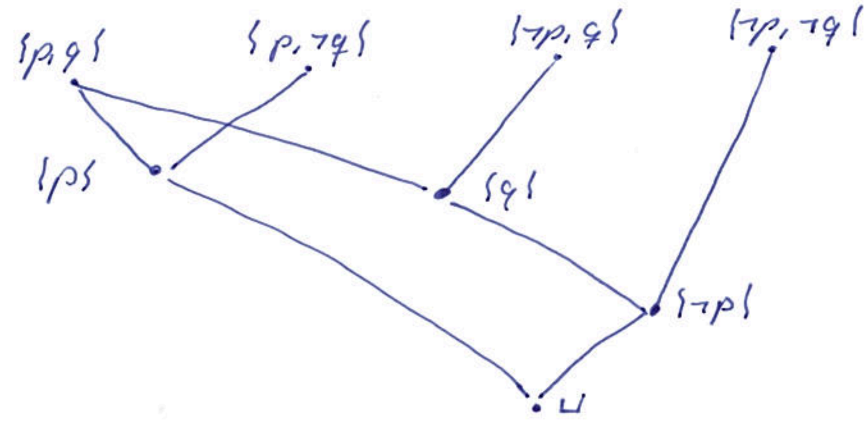
$$(1 \wedge q) \vee (\neg r \wedge 0)$$

$\models q$

$q = 1$

1 ✓

Beispiel (Resolution):



Beweis (Widerlegungsvollständigkeit der Resolution):

Angenommen $\mathcal{F} \in F$, $\mathcal{F}$ in KNF, ist unerfüllbar.

Zeige $\mathcal{F} \vdash_{Res} \square$.

Beweis mittels Induktion über die Anzahl der Variablen in $\mathcal{F}$.

IA: Falls $n = 1$, dann $\mathcal{F} \equiv p \wedge \neg p \vdash_{Res} \square$.

IS: Angenommen für jede unerfüllbare Klauselmenge B, die nur Variablen $p_1, \dots, p_n$ enthält, gilt

$$B \vdash_{Res} \square.$$

Sei nun A eine Klauselmenge über $p_1, \dots, p_n, p_{n+1}$.
Aus A konstruieren wir zwei neue Klauselmengen, die nur noch $p_1, \dots, p_n$ enthalten:

$A_{p_{n+1}=0}$ = • streiche jedes Vorkommen von p_{n+1} in einer Klausel
• streiche jede Klausel mit $\neg p_{n+1}$.

$A_{p_{n+1}=1}$ = umgekehrt.

Es müssen $A_{p_{n+1}=0}$ und $A_{p_{n+1}=1}$ unerfüllbar sein, da A unerfüllbar ist (siehe Davis-Putnam).
Daher ist auf $A_{p_{n+1}=0}$ und $A_{p_{n+1}=1}$ die IV anwendbar und liefert:

$$A_{p_{n+1}=0} \vdash_{Res} \sqcup \quad \text{und} \quad A_{p_{n+1}=1} \vdash_{Res} \sqcup .$$

Seien die Klauseln in der Ableitung $A_{p_{n+1}=0} \vdash_{Res} \sqcup$

$$K_{0,1} \dots K_{0,m} \equiv \sqcup .$$

In der zweiten Ableitung seien die Klauseln

$$K_{1,1} \dots K_{1,n} \equiv \sqcup .$$

Einige dieser Klauseln $K_{i,j}$ entstanden aus Klauseln in A, indem p_{n+1} bzw. $\neg p_{n+1}$ gestrichen wurde.
Indem wir p_{n+1} bzw. $\neg p_{n+1}$ wieder herstellen, erhalten wir

$\widetilde{K}_{0,i} := K_{0,i} \cup \{p_{n+1}\}$, falls p_{n+1} entfernt wurde
$\widetilde{K}_{1,j} := K_{1,j} \cup \{\neg p_{n+1}\}$, falls $\neg p_{n+1}$ entfernt wurde.

Mit diesen neuen Klauseln gelten die Ableitungen

$$\left.\begin{array}{l} \widetilde{K}_{0,1} \dots \widetilde{K}_{0,m} \equiv \{p_{n+1}\} \\ \widetilde{K}_{1,1} \dots \widetilde{K}_{1,m} \equiv \{\neg p_{n+1}\} \end{array}\right\} \text{oder sogar } \sqcup. \text{ In dem Fall ist man sofort fertig.}$$

Ein letzter Resolutionsschritt liefert $\sqcup$.

$\square$