

Übungen zur Vorlesung Logik  
Blatt 6

Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 10. Juli 2015, 12:00 Uhr

---

**Aufgabe 6.1** [Semi-Entscheidbarkeit von Erfüllbarkeit und Äquivalenz, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

Zeigen Sie, dass die folgenden Probleme semi-entscheidbar, aber nicht entscheidbar sind:

- a) Gegeben: Eine prädikatenlogische Formel  $A \in \text{FO}(S)$  (für eine Signatur  $S$ ).  
Frage: Ist  $A$  unerfüllbar?
- b) Gegeben: Prädikatenlogische Formeln  $A, B \in \text{FO}(S)$ .  
Frage: Gilt  $A \models B$  ?

**Aufgabe 6.2** [Unentscheidbarkeit von Erfüllbarkeit, 1 Punkt]

Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist:

Gegeben: Eine Signatur  $S$ , in der jedes Prädikatensymbol höchstens zweistellig ist  
und eine Formel  $A \in \text{FO}(S)$ .

Frage: Ist  $A$  erfüllbar?

**Bitte umdrehen!**

**Aufgabe 6.3** [Reduktionen, 1 Punkt]

Es sei  $\mathcal{C}$  eine Klasse von Problemen und  $A, B$  Probleme.  $A$  heißt  $\mathcal{C}$ -schwer, wenn jedes Problem aus  $\mathcal{C}$  auf  $A$  many-one-reduzierbar ist.

Zeigen Sie:

Ist  $A$  ein  $\mathcal{C}$ -schweres Problem und  $A$  auf  $B$  many-one-reduzierbar, dann ist auch  $B$  ein  $\mathcal{C}$ -schweres Problem.

**Aufgabe 6.4** [PCP, Unentscheidbarkeit von Leerheit revisited, 1 Punkt pro Teilaufgabe]

a) • Zeigen Sie, dass die folgende PCP-Instanz keine Lösung hat:

$$I = \left( (0, 10), (110, 000), (001, 10) \right)$$

• Geben Sie eine Lösung für die folgende PCP-Instanz an:

$$I = \left( (011, 0)(1, 011), (0, 11) \right)$$

b) Eine kontextfreie Grammatik heißt *linear*, wenn auf der rechten Seite jeder Regel höchstens ein Nichtterminal-Symbol vorkommt. Ein Beispiel für eine solche Grammatik ist

$$S \rightarrow aSa, \quad S \rightarrow bSb, \quad S \rightarrow a, \quad S \rightarrow b, \quad S \rightarrow \varepsilon,$$

wobei  $\varepsilon$  das leere Wort bezeichnet. Die von der Beispielgrammatik erzeugte Sprache ist die Menge aller Palindrome, also Wörter über  $a$  und  $b$ , die vorwärts und rückwärts gelesen gleich sind.

Zeigen Sie, dass das folgende Problem unentscheidbar ist, indem Sie das PCP auf dieses Problem reduzieren.

Gegeben: Lineare kontextfreie Grammatiken  $G_1$  und  $G_2$ .

Frage: Gilt  $L(G_1) \cap L(G_2) = \emptyset$  ?

*Hinweis:* Diese Aussage haben Sie auf dem letzten Präsenzblatt ohne Beweis verwendet.

**Abgabe: bis 10. Juli 2015, 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4**