
Übungen zur Vorlesung Logik
Blatt 5

Jun.-Prof. Dr. Roland Meyer

Abgabe bis 26.6.2012 12:00 Uhr

Aufgabe 5.1 [Mächtigkeit von Domänen I]

Für jede Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ sei $|I|$ definiert als $|D|$.

- a) Es sei eine natürliche Zahl n gegeben. Geben Sie unter Verwendung des Prädikats „ $=$ “ eine prädikatenlogische Formel A an, so dass für jede Interpretation I gilt $I \models A$ genau dann, wenn $|I| \geq n$.
- b) Geben Sie eine Formel mit der obigen Eigenschaft an, die außerdem ohne das Prädikat „ $=$ “ auskommt.

Aufgabe 5.2 [Mächtigkeit von Domänen II]

Wir nennen eine Interpretation $I = (D, I_c, I_v)$ *endlich*, wenn D endlich ist.

- a) Geben Sie eine Formel A an, für die gilt: $I \models A$ genau dann, wenn $|I| = 1$.
- b) Sei B eine Formel, in der „ $=$ “ nicht vorkommt. Wie kann aus einem endlichen Modell I für B ein Modell I' für B konstruiert werden, so dass $|I'| = |I| + 1$? Dass I' Modell für B ist, muss hier nicht unbedingt bewiesen werden.
- c) Schließen Sie aus b), dass es keine Formel gibt, die ohne „ $=$ “ auskommt und äquivalent zu obiger Formel A ist.

Aufgabe 5.3 [Ein Erfüllbarkeitstest]

- a) Entwerfen Sie einen Algorithmus, der für eine gegebene endliche Interpretation I und eine Formel A feststellt, ob $I \models A$ gilt. *Übrigens:* Damit haben Sie bewiesen, dass Erfülltsein unter einer gegebenen endlichen Interpretation entscheidbar ist.
- b) Gegeben sei eine Formel A der Form $\exists x_1 \cdots \exists x_n B$, wobei in B keinerlei Quantoren vorkommen. Zeigen Sie: Ist A erfüllbar, so besitzt A ein Modell I mit $|I| \leq n + |B|$. (In diesem Fall sagt man auch, A besitzt eine *small model property*.)
- c) Beweisen Sie unter Verwendung von a) und b): Ist eine Formel $A \equiv \exists x_1 \cdots \exists x_n B$ wie oben gegeben, so kann algorithmisch festgestellt werden, ob A erfüllbar ist.

Aufgabe 5.4 [Modellierung]

- a) Geben Sie Funktionssymbole und Prädikatensymbole an, mittels derer Namen, Adressen und Parteizugehörigkeit von Personen (z.B. in einer Datenbank) modelliert werden können. Es soll dabei die Möglichkeit bestehen, dass zu gewissen Personen nur ein Teil der Angaben vorliegen. Spezifizieren Sie insbesondere Stelligkeiten und intendierte Bedeutung der Funktions- und Prädikatensymbole.

- b) Formalisieren Sie folgenden Integritäts-Constraint: „Wenn eine Person der Partei P oder L angehört, dann sind auch Name und Adresse von dieser Person bekannt.“

Abgabe: bis 26.6.2012 12:00 Uhr im Kasten neben Raum 34/401.4