$\boxed{A.2}$

(CONS) $$\frac{}{(x := \mathrm{cons}(a_1,\ldots,a_n), s, h) \to (s[x \to v], h[v \mapsto \mathcal{S}[\![a_1]\!]s, \ldots, v+n-1 \mapsto \mathcal{S}[\![a_n]\!]s])},$$

falls $v,\ldots,v+n-1 \notin \mathrm{dom}(h)$

(DEL) $$\frac{}{(\mathrm{dispose}(a), s, h \uplus \{\underline{\mathcal{S}[\![a]\!]s \mapsto \_}\}) \to (s,h)}$$

(MUT) $$\frac{}{([a_1] = a_2, s, h) \to (s, h[\mathcal{S}[\![a_1]\!]s \mapsto \mathcal{S}[\![a_2]\!]s])},$$

falls $\underline{\mathcal{S}[\![a_1]\!]s \in \mathrm{dom}(h)}$

(READ) $$\frac{}{(x = [a], s, h) \to (s[x \mapsto h(\mathcal{S}[\![a]\!]s)], h)},$$

falls $\underline{\mathcal{S}[\![a]\!]s \in \mathrm{dom}(h)}$

// abort falls Nebenbedingungen nicht erfüllt

$\boxed{4.3}$

a) z.z. $[\![A * B]\!] s h$ gdw $[\![B * A]\!] s h$ und $[\![(A * B) * C]\!] s h$ gdw $[\![A * (B * C)]\!] s h$ für alle Assertions A, B, C und für alle s, h.

- $[\![A * B]\!] s h \;\exists\; \exists h_1, h_2.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s h_1 \wedge [\![B]\!] s h_2$

$\qquad \exists\; \exists h_1, h_2.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![B]\!] s h_1 \wedge [\![A]\!] s h_2$

$\qquad \exists\; [\![B * A]\!] s h$

- $[\![(A * B) * C]\!] s h \;\exists\; \exists h_1, h_2.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A * B]\!] s h_1 \wedge [\![C]\!] s h_2$

$\exists\; \exists h_1, h_2.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge (\exists h_3, h_4.\; h_1 = h_3 \uplus h_4 .\; [\![A]\!] s h_3 \wedge [\![B]\!] s h_4)$
$\qquad \wedge [\![C]\!] s h_2$

$\exists\; \exists h_1, h_2, h_3, h_4.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge h_1 = h_3 \uplus h_4 \wedge$
$\qquad [\![A]\!] s h_3 \wedge [\![B]\!] s h_4 \wedge [\![C]\!] s h_2$

$\exists\; \exists h_1, h_3.\; h = h_1 \uplus h_3 \wedge [\![A]\!] s h_3$
$\qquad \wedge (\exists h_2, h_4.\; h_1 = h_2 \uplus h_4 \wedge [\![B]\!] s h_4 \wedge [\![C]\!] s h_2)$

$\exists\; \exists h_1, h_2.\; h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s h_1 \wedge [\![B * C]\!] s h_2$

$\exists\; [\![A * (B * C)]\!] s h$

$\square$

$\boxed{4.3}$ Seien A, B, s, h bel.

b) $[\![A * \mathrm{emp}]\!]sh \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1 \wedge \underbrace{[\![\mathrm{emp}]\!]sh_2}_{h_2 = \emptyset}$

$$\Leftrightarrow \exists h_1 .\ h = h_1 \wedge [\![A]\!]sh_1$$

$$\Leftrightarrow [\![A]\!]sh_1$$

$\square$

c) $[\![A * (A -\!\!* B)]\!]sh \Leftrightarrow \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1 \wedge [\![A -\!\!* B]\!]sh_2$

$\Leftrightarrow \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1 \wedge \forall h_3 [h_3 \perp h_2 \wedge [\![A]\!]sh_3$
$\Longrightarrow [\![B]\!]s(h_3 \uplus h_2)]$

$\overset{h_3 = h_1}{\models} \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1 \wedge (h_1 \perp h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1$
$\Longrightarrow [\![B]\!]s(h_1 \uplus h_2))$

$\overset{MP}{\models} \exists h_1, h_2 .\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!]sh_1 \wedge [\![B]\!]s(h_1 \uplus h_2)$

$\models [\![B]\!]sh$

$\square$

$\boxed{A4.4}$ $\forall s,h.\ (\llbracket \text{Assertion 1} \rrbracket\, s\, h \Rightarrow \llbracket \text{Assertion 2} \rrbracket\, s\, h)$ // [redacted] 5.3 in VL

a) Seien a, b, c, d und s, h bel. / $(a \mapsto b) * (c \mapsto d)$ impliziert $(a \hookrightarrow b) \wedge (c \hookrightarrow d) \wedge (a \neq c)$

$$\llbracket a \mapsto b * c \mapsto d \rrbracket s h \Leftrightarrow \exists h_1, h_2.\ \underbrace{h = h_1 \uplus h_2}_{\substack{\Leftrightarrow \mathrm{dom}(h_1) \\ \cap\, \mathrm{dom}(h_2) \\ = \emptyset}} \wedge \underbrace{\llbracket a \mapsto b \rrbracket s h_1}_{\Leftrightarrow h_1 = \{a \mapsto b\}} \wedge \underbrace{\llbracket c \mapsto d \rrbracket s h_2}_{\Leftrightarrow h_2 = \{c \mapsto d\}}$$

$$\models h = \{a \mapsto b\} \uplus \{c \mapsto d\} \wedge \llbracket a \neq c \rrbracket s h$$

Noch zz: $h = \{a \mapsto b\} \uplus \{c \mapsto d\}$ „$\models$" $\llbracket a \hookrightarrow b \wedge c \hookrightarrow d \rrbracket s h$

Dazu:

- $\llbracket a \hookrightarrow b \rrbracket s h \Leftrightarrow \llbracket a \mapsto b * \text{true} \rrbracket s h \Leftrightarrow \exists h_1, h_2.\ h = h_1 \uplus h_2 \wedge \llbracket a \mapsto b \rrbracket s h_1 \wedge \llbracket \text{true} \rrbracket s h_2$

  Wähle $h_1 = \{a \mapsto b\}$ und $h_2 = \{c \mapsto d\}$.

  Dann folgt $\llbracket a \hookrightarrow b \rrbracket$.

  dom$(h_1) = \{a\}$ und $h_1(a) = b$

- $\llbracket c \hookrightarrow d \rrbracket s h$ folgt analog

$\square$

$\boxed{A4.4}$

b) Widerlege. // $A * B$ impliziert $A \wedge B$

Betrachte $h = \{x \mapsto 1\} \uplus \{y \mapsto 2\}$

und $A \equiv x \mapsto 1$, $B \equiv y \mapsto 2$

$[\![A * B]\!] s h = 1 \rightsquigarrow$ für Separation wähle $h_1 = \{x \mapsto 1\}$
$h_2 = \{y \mapsto 2\}$

Damit: $h = h_1 \uplus h_2 \wedge [\![A]\!] s h_1 \wedge [\![B]\!] s h_2$ ✓

Aber: $[\![A \wedge B]\!] s h \not\models \underbrace{[\![A]\!] s h}_{\substack{\Downarrow \\ h = \{x \mapsto 1\}}} \wedge \underbrace{[\![B]\!] s h}_{\substack{\Downarrow \\ h = \{y \mapsto 2\}}}$ ↯

c) Widerlege. // $A \wedge B$ impliziert $A * B$

Betrachte Heap $h = \{x \mapsto 1\}$, $A \equiv B \equiv x \mapsto 1$

Dann gilt $[\![A \wedge B]\!] s h$, da $[\![A]\!] s h$ und $[\![B]\!] s h$ gilt.

Aber $[\![A * B]\!] s h$ gilt nicht!

Beweis: Ang. $[\![A * B]\!] s h$ gilt. Dann ex. h_1, h_2 mit

$h = h_1 \uplus h_2$ und $[\![A]\!] s h_1$ und $[\![B]\!] s h_2$

Wir wissen: $[\![A]\!] s h_1$ gilt $h_1 = \{x \mapsto 1\}$
$[\![B]\!] s h_2$ gilt $h_2 = \{x \mapsto 1\}$

Also $dom(h_1) \cap dom(h_2) \neq \emptyset$ ↯ $h = h_1 \uplus h_2$

$\boxed{A4.4}$

// $A -\!\!* B$ impliziert $A \Rightarrow B$

d) Widerlege: Wähle $h = \{x \mapsto 1\}$, $A \equiv x \mapsto 1$, $B \equiv emp$.

Nun gilt für alle h' mit $h \perp h'$ folgendes: $[\![A]\!]sh' = 0$.

Also (*) $h \perp h' \wedge [\![A]\!]sh'$ für alle h' <u>nicht erfüllt</u>.

Somit gilt $[\![A -\!\!* B]\!]sh = 1$, da (*) Vorbedingung von $-\!\!*$!

Ferner gilt $[\![A]\!]sh = 1$.

Aber $[\![emp]\!]sh = 0$. Also $[\![A \Rightarrow B]\!]sh = 0$.

// $A \Rightarrow B$ impliziert $A -\!\!* B$

e) Widerlege. Wähle $h = \{y \mapsto 2\}$, $A \equiv B \equiv x \mapsto 1$.

$A \Rightarrow B$ ist Tautologie, also gilt $[\![A \Rightarrow B]\!]sh$.

Sei h' bel. mit: $h \perp h'$ und $[\![A]\!]sh'$. // h' existiert

Dann gilt: $h' = \{x \mapsto 1\}$. Also $h \uplus h' = \{x \mapsto 1, y \mapsto 2\}$.

Aber $[\![B]\!]s\, h \uplus h'$ gilt nicht!

Damit gilt auch $[\![A -\!\!* B]\!]sh$ nicht.

// $A \Rightarrow B$ impliziert $(A * C) \Rightarrow (B * C)$

f) Widerlege. Wähle $h = \{x \mapsto 1\}$, $A \equiv emp$, $B \equiv C \equiv x \mapsto 1$.

Es gilt $[\![A \Rightarrow B]\!]sh = 1$, da $[\![A]\!]sh = 0$.

Auch gilt $[\![A * C]\!]sh = 1$, da $[\![A * C]\!]sh \overset{4.3a}{=} [\![C]\!]sh = 1$.

Aber $[\![B * C]\!]sh$ gilt nicht!