$\boxed{3.1}$

Definiere:

$$I \equiv x = y + b$$

$$c_1 \equiv y := y + 1$$

$$c_2 \equiv b := b - 1$$

$$\frac{}{\{I[^{b}/_{b-1}][^{y}/_{y+1}]\}\ c_1\ \{I[^{b}/_{b-1}]\}}\ \text{ASSIGN}$$

$$\frac{I \Rightarrow I[^{b}/_{b-1}][^{y}/_{y+1}] \qquad \{I[^{b}/_{b-1}][^{y}/_{y+1}]\}\ c_1\ \{I[^{b}/_{b-1}]\} \qquad I[^{b}/_{b-1}] \Rightarrow I[^{b}/_{b-1}]}{\{I\}\ c_1\ \{I[^{b}/_{b-1}]\}}\ \text{CONS}$$

$$\frac{}{\{I[^{b}/_{b-1}]\}\ c_2\ \{I\}}\ \text{ASSIGN}$$

$$\frac{\{I\}\ c_1\ \{I[^{b}/_{b-1}]\} \qquad \{I[^{b}/_{b-1}]\}\ c_2\ \{I\}}{\{I\}\ c_1 ; c_2\ \{I\}}\ \text{SEQ}$$

$$\frac{I \wedge b \neq 0 \Rightarrow I \qquad \{I\}\ c_1 ; c_2\ \{I\} \qquad I \Rightarrow I}{\{I \wedge b \neq 0\}\ c_1 ; c_2\ \{I\}}\ \text{CONS}$$

$$\frac{\{I \wedge b \neq 0\}\ c_1 ; c_2\ \{I\}}{\{I\}\ w\ \{I \wedge b = 0\}}\ \text{WHILE}$$

$$\frac{b = x \wedge y = 0 \wedge x \geq 0 \Rightarrow I \qquad \{I\}\ w\ \{I \wedge b = 0\} \qquad I \wedge b = 0 \Rightarrow x = y}{\{b = x \wedge y = 0 \wedge x \geq 0\}\ w\ \{x = y\}}\ \text{CONS}$$

$\boxed{3.2}$ Sei $\mathcal{S}[\![A]\!] = wlp(c,B)$.

① Ang. $\nvDash \{A\}c\{B\}$.

Dann ex. $\sigma, \sigma' \in State$ mit:

$$\sigma \models A \text{ und } (\sigma,c) \Downarrow \sigma' \text{ und } \sigma' \nvDash B \ .$$

Nach Vor. wissen wir: $\sigma \in wlp(c,B)$.

Damit gilt also nach Def. für σ, σ':

$$\sigma' \models B \ \lightning$$

$\square$

② Sei $\{A'\}c\{B\}$ gültig.

Ang. $A' \not\Rightarrow A$. Dann ex. $\sigma \in State$ mit

$$\sigma \models A' \quad \text{und} \quad \sigma \nvDash A \ . \qquad (*)$$

Beachte: σ ex tatsächlich, da $A' \nvDash false$ (sonst $\Rightarrow$ erfüllt).

Nach Vor. gilt für alle $\sigma' \in State$:

$$\sigma \models A' \text{ und } (\sigma,c) \Downarrow \sigma' \Longrightarrow \sigma' \models B \ .$$

Zusammen mit (*) bekommen wir für alle σ':

$$(\sigma,c) \Downarrow \sigma' \Longrightarrow \sigma' \models B \ .$$

Damit gilt: $\sigma \in wlp(c,B)$

Nach Vor. also: $\sigma \in \mathcal{S}[\![A]\!]$ $\lightning$ zu *

$\square$

$\boxed{A3.3}$ zz: (a) W-- ist Turing vollständig.

(b) Halteproblem in W-- ist unter Ann. entscheidbar.

ad a) • Kodiere TM M als <u>Zählermaschine</u>, dann als W-- Program.

↳ Turing vollständig (Minsky '67)

Zählermaschinen bestehen aus:

- Kontrollregister pc
- k Register $r_1, \dots, r_k$ über $\mathbb{N}$
- Program: Sequenz $s_1, \dots, s_n$ von Anweisungen
- Anweisungen: $INC(i) \rightsquigarrow r_i := r_i + 1$

  $DEC(i) \rightsquigarrow r_i := r_i - 1$

  $JZ(i,j) \rightsquigarrow$ if$(r_i == 0)\{pc' = j\}$

Als W-- Program:

```
pc = 1
while (pc ≤ n) {
    pc' := pc + 1;
    ⋮
    if pc = i then ... else skip fi
    ⋮
    pc := pc';
```

→ Kodiere Anweisung wie oben.

• Alternativ: Kodiere TM M direkt als W-- Program.

↳ 1 Variable für Kontrollzustand

↳ 3 Variablen für Band: x, y, z

- x: Band vor Kopf
- y: Kopf-Zelle
- z: Band nach Kopf

kodiere Band über {0,1} als Integer ⇝ Binär encoding

~~↳ x: MSB, z: LSB~~

↳ x: LSB, z: MSB

ad b) Prüfe, ob TM M auf Eingabe x hält.

Sei M' eine TM, die M auf x ausführt.

Kodiere M' als Program c.

Dann prüfe $\models \{true\}\, c\, \{false\}$.

Falls valide, dann terminiert M' nicht,

also M auf x auch nicht.

$\square$

$\boxed{3.4}$

- $vc(\{A\}\ 2\ \{B\}) = vc(\{I_1 \land a>0\}\ 4;5;9\ \{I_1\})$
  $\cup \{ \underbrace{A \to I_1}_{\checkmark} ,\ \underbrace{I_1 \land a \leq 0 \to B}_{\checkmark} \}$

- $vc(\{I_1 \land a>0\}\ 4;\underbrace{5;9}\ \{I_1\})$

  $= vc(\{I_1 \land a>0\}\ 4\ \{\underbrace{pred(5;9, I_1)}\}) \cup vc(\{pred(5;9)\}\ 5;9\ \{I_1\})$

  $\models pred(5, pred(9, I_1))$

  $\models I_2$

- $vc(\{I_1 \land a>0\}\ 4\ \{I_2\}) = \{ \underbrace{I_1 \land a>0 \to \overbrace{I_2[{}^{b}/_{0}]}^{\models I_1 \land a>0}}_{\checkmark} \} = \{\underbrace{true}_{\checkmark}\}$

- $vc(\{I_2\}\ 5;9\ \{I_1\}) = vc(\{I_2\}\ 5\ \{pred(9, I_1)\})$
  $\cup\ vc(\{\underbrace{pred(9, I_1)}_{I_1[{}^{a}/_{a-1}]}\}\ 9\ \{I_1\})$

- $vc(\{I_1[{}^{a}/_{a-1}]\}\ 9\ \{I_1\}) = \{ \underbrace{I_1[{}^{a}/_{a-1}] \to I_1[{}^{a}/_{a-1}]}_{\checkmark} \}$

~~• $vc(\{I_2[{}^{a}/_{a-1}]\}\ 5$~~

- $vc(\{I_2\}\ 5\ \{I_1[{}^{a}/_{a-1}]\}) = vc(\{I_2 \land a \neq b\}\ 7;8\ \{I_2\})$
  $\cup \{ \underbrace{I_2 \to I_2}_{\checkmark} ,\ \underbrace{I_2 \land a=b \to I_1[{}^{a}/_{a-1}]}_{\checkmark} \}$

- $vc(\{I_2 \land a \neq b\}\ 7;8\ \{I_2\}) = vc(\{I_2 \land a \neq b\}\ 7\ \{pred(8, I_2)\})$
  $\cup\ vc(\{\underbrace{pred(8, I_2)}_{\models I_2[{}^{b}/_{b+1}]}\}\ 8\ \{I_2\})$

- $vc(\{I_2 \land a \neq b\}\ 7\ \{I_2[{}^{b}/_{b+1}]\}) = \{ \underbrace{I_2 \land a \neq b \to I_2[{}^{b}/_{b+1}][{}^{c}/_{c+1}]}_{\checkmark} \}$

- $vc\{I_2[{}^{b}/_{b+1}]\}\ 8\ \{I_2\} = \{ \underbrace{I_2[{}^{b}/_{b+1}] \to I_2[{}^{b}/_{b+1}]}_{\checkmark} \}$