

A2.1

a) Signatur $\text{Sig} = (\text{Funkt}, \text{Präd})$ mit

$$\text{Funkt} = \{ +/2, -/2, */2 \} \cup \{ k/0 \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$\text{Präd} = \{ \geq 2, \underline{\text{even}/1} \}$$

Sig-Struktur $\mathcal{I} = (\mathbb{Z}, \mathcal{I})$ mit

erwarteter Interpretation über \mathbb{Z} für: $\mathcal{I}(+)$, $\mathcal{I}(-)$, $\mathcal{I}(*)$, $\mathcal{I}(>)$

und $\mathcal{I}(\text{even}) = f$

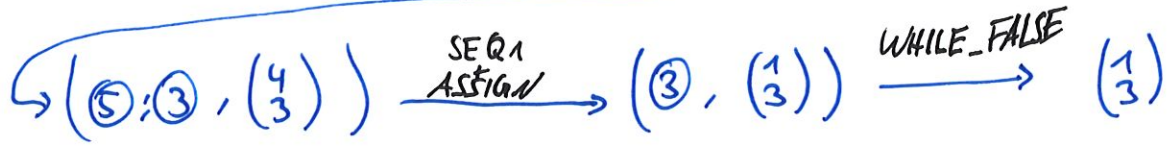
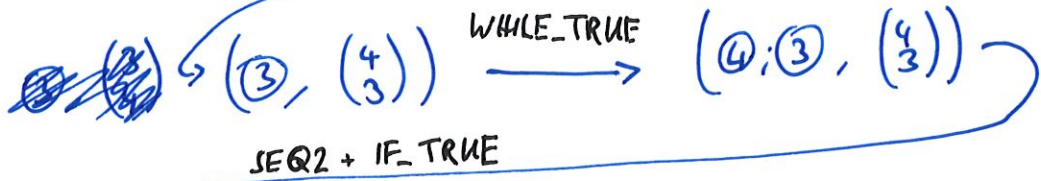
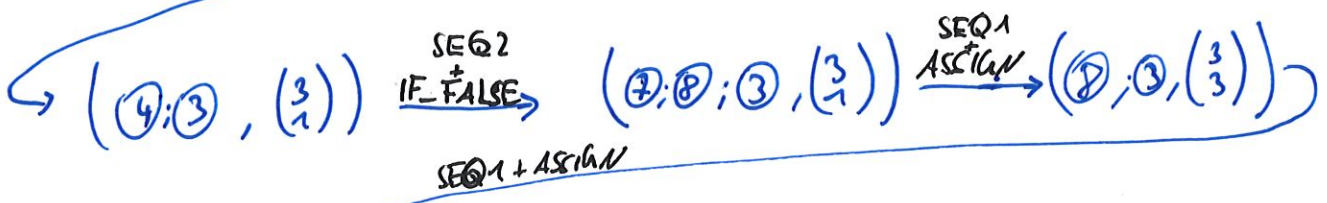
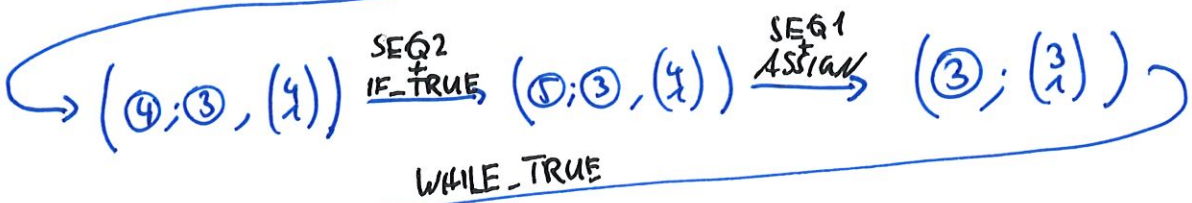
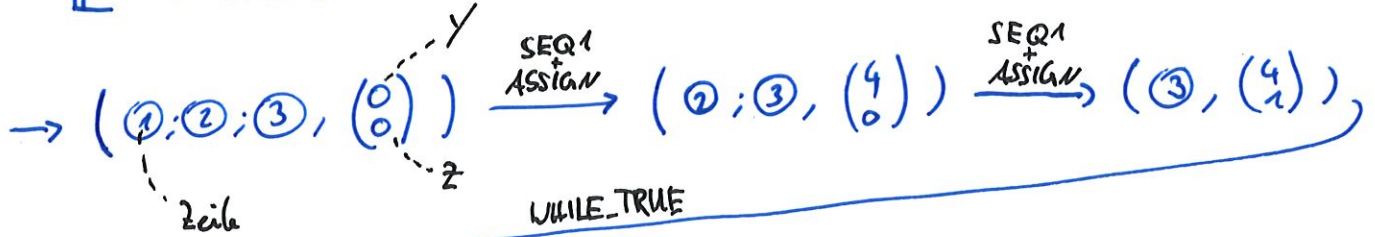
wobei

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{B}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

A2.1

b) [1:2:3] (0,0):



A2.1

c)

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \quad \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \\
 \underline{(\textcircled{1}, \textcircled{0}) \Downarrow (\textcircled{4})} \quad \underline{(\textcircled{2}, \textcircled{4}) \Downarrow (\textcircled{4})} \quad \text{(i)} \\
 \text{BSEQ} \\
 \underline{(\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{0}) \Downarrow (\textcircled{4})} \quad \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{4}) \Downarrow (\textcircled{3})} \\
 \text{BSEQ} \\
 \underline{(\textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{0}) \Downarrow (\textcircled{3})}
 \end{array}$$

ad i)

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \\
 \underline{(\textcircled{5}, \textcircled{4}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \text{(ii)} \\
 \xrightarrow{\text{BIFTRUE}} \\
 \underline{(\textcircled{4}, \textcircled{4}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \\
 \text{BWHILE_TRUE} \\
 \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{4}) \Downarrow (\textcircled{3})}
 \end{array}$$

ad ii)

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \quad \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \\
 \underline{(\textcircled{7}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \underline{(\textcircled{9}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{4})} \quad \text{BSEQ} \\
 \underline{(\textcircled{7}, \textcircled{9}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{4})} \quad \text{(iii)} \\
 \xrightarrow{\text{BIF_FALSE}} \quad \xrightarrow{\text{BWHILE_TRUE}} \\
 \underline{(\textcircled{4}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \\
 \text{BWHILE_TRUE} \\
 \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})}
 \end{array}$$

ad iii)

$$\begin{array}{c}
 \xrightarrow{\text{BASSIGN}} \\
 \underline{(\textcircled{5}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \text{BWHILE_FALSE} \\
 \xrightarrow{\text{BIF_TRUE}} \quad \xrightarrow{\text{BWHILE_TRUE}} \\
 \underline{(\textcircled{4}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \quad \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})} \\
 \text{BWHILE_TRUE} \\
 \underline{(\textcircled{3}, \textcircled{3}) \Downarrow (\textcircled{3})}
 \end{array}$$

42.2

$$\begin{array}{l} \text{a) } \frac{(c_1, \sigma) \rightarrow (c'_1, \sigma')}{(c_1 \parallel c_2, \sigma) \rightarrow (c'_1 \parallel c_2, \sigma')} \text{ (PAR1)} \quad \frac{(c_1, \sigma) \rightarrow \sigma'}{(c_1 \parallel c_2, \sigma) \rightarrow (c_2, \sigma')} \text{ (PAR2)} \\ \\ \frac{(c_2, \sigma) \rightarrow (c'_2, \sigma')}{(c_1 \parallel c_2, \sigma) \rightarrow (c_1 \parallel c'_2, \sigma')} \text{ (PAR3)} \quad \frac{(c_2, \sigma) \rightarrow \sigma'}{(c_1 \parallel c_2, \sigma) \rightarrow (c_1, \sigma')} \text{ (PAR4)} \end{array}$$

(SKIP), (ASSIGN), (SEQ1), (SEQ2), (IF_TRUE), (IF_FALSE),
(WHILE_TRUE), (WHILE_FALSE), (ASSUME) wie in VL

b) Determinismus

- c) • Big-Step Semantik überhört Konfigurationen in enem Finalzustand.
Bei einer parallelen Ausführung können sich allerdings mehrere Finalzustände ergeben.
- Des Weiteren können Zwischenzustände nicht dargestellt werden.
Es kann kein Interleaving von c_1 und c_2 berechnet werden, da der Zwischenzustand vor einem Context-Switch nicht darstellbar ist.

A2.3

- zeige: (i) \Rightarrow c enthält divergente Berechnung

Gelle (i). Wir erhalten die Ableitung

$$(c, \sigma_{\text{init}}) \longrightarrow^* (\text{assume}(b); \dots, \sigma) = s$$

wobei σ_{init} der initiale Zustand ist und $\mathcal{S}[\![b]\!](\sigma) = \emptyset$.

Damit existiert kein s' mit $s \rightarrow s'$, nach Regel (ASSUME).

- zeige: (ii) \Rightarrow c enthält divergente Berechnung

Gelle (ii). Wir wissen: für jede Konfiguration gibt es höchstens 2

Nachfolger-Konfiguration (PAR \rightarrow 2, sonst \rightarrow 1).

Wenn wir die \rightarrow -Ableitungen als Baum betrachten, so hat jeder

Knoten im Baum endlichen Grad. Ferner ist der Baum der

erreichbaren Konfigurationen zusammenhängend. Dann gibt

Königs Lemma ein unendliches Pfad. Das Programm divergiert.

- zeige: (iii) \Rightarrow c enthält divergente Berechnung

Gelle (iii). Dann ex. Ableitung folgender Form

$$\underbrace{(c, \sigma_{\text{init}}) \longrightarrow^* (c_1, \sigma_1)}_{\text{Prefix}} \longrightarrow^* \underbrace{(c_1, \sigma_1)}_{\text{Kreis}}$$

Da wir den Kreis beliebig wiederholen können, terminiert c nicht.

• zeige: c enthält divergente Berechnung \Rightarrow (i) oder (ii) oder (iii)

Enthalte c eine divergente Berechnung. Diese hat die Form

$$(c, \sigma_{init}) \rightarrow s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow \dots, \quad s_i \in (W \times \text{State}) \cup \text{State}$$

\parallel
 s_0

Fall 1, es existiert "ein letztes" s_i , also ~~$s_i \in \text{State}$~~ .

Nach Ann. ist $s_i \in (W \times \text{State})$, da sonst nicht divergent.

Alle SOS-Regeln haben einen Nachfolger, außer (ASSUME).

D.h. s_i ist nicht weiter ableitbar, da es ein nicht-erfülltes
assum(e) enthält, (i).

Fall 2, die Berechnung ist unendlich, $\forall i, j \exists s_i \rightarrow s_j$.

Fall 2.1, ein s_i wiederholt sich, also $s_i \rightarrow^* s_j$ mit $s_i = s_j$.

Dann ist ein Kreis erreichbar, (ii).

Fall 2.2 $\forall i, j. i \neq j \Rightarrow s_i \neq s_j$.

Dann enthält die Ableitung unendlich viele
verschiedene (erreichbare) Konfigurationen, (i).

A2.4

Definiere

$$\rightsquigarrow \subseteq (W \times \text{Stack}) \times \frac{(W \times \text{Stack})}{\text{state}}$$

mit finalen Zuständen der Form

$$(\text{skip}, \sigma) \in (W \times \text{Stack})$$

wie folgt:

$$\frac{}{(x := a, \sigma) \rightsquigarrow (\text{skip}, \sigma[x \mapsto \mathcal{F}[a](\sigma)])} \text{NASSIGN}$$

$$\frac{}{(\text{skip}; c_2, \sigma) \rightsquigarrow (c_2, \sigma)} \text{NSEQ1}$$

$$\frac{(c_1, \sigma) \rightsquigarrow (c_1', \sigma')}{(c_1; c_2, \sigma) \rightsquigarrow (c_1'; c_2, \sigma')} \text{NSEQ2}$$

$$\frac{}{(\text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \text{ fi}, \sigma) \rightsquigarrow (c_1, \sigma)} \text{NIF-TRUE} \quad \text{falls } \mathcal{F}[b](\sigma) = 1$$

$$\frac{}{(\text{if } b \text{ then } c_1 \text{ else } c_2 \text{ fi}, \sigma) \rightsquigarrow (c_2, \sigma)} \text{NIF-FALSE} \quad \text{falls } \mathcal{F}[b](\sigma) = 0$$

$$\frac{}{(\text{while } b \text{ do } c \text{ od}, \sigma) \rightsquigarrow (\text{if } (b) \text{ then } c; \text{while } b \text{ do } c \text{ od else skip fi}, \sigma)} \text{NWHILE}$$

$$\frac{}{(\text{assume } (b), \sigma) \rightsquigarrow (\text{skip}, \sigma)} \text{NASSUME} \quad \text{falls } \mathcal{F}[b](\sigma) = 1$$