A2.1

a) Signatur $Sig = (Funk, Präd)$ mit

$Funk = \{ +/2, -/2, */2 \} \cup \{ k/0 \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$Präd = \{ >/2, \underline{even/1} \}$

Sig-Struktur $\mathcal{S} = (\mathbb{Z}, \mathcal{I})$ mit

erwarteter Interpretation über $\mathbb{Z}$ für: $\mathcal{I}(+), \mathcal{I}(-), \mathcal{I}(*), \mathcal{I}(>)$

und $\underline{\mathcal{I}(even) = f}$

wobei

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{B}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } x \text{ ungerade} \end{cases}$$

$\boxed{A2.1}$

b) $[\![1;2;3]\!](0,0)$:

y

$$\to \left(1;2;3,\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[ASSIGN]{SEQ1 +} \left(2;3,\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[ASSIGN]{SEQ1 +} \left(3,\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right)$$

z

Zeile

$$\xrightarrow{WHILE\_TRUE} \left(4;3,\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[IF\_TRUE]{SEQ2 +} \left(5;3,\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[ASSIGN]{SEQ1 +} \left(3;\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$\xrightarrow{WHILE\_TRUE} \left(4;3,\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[IF\_FALSE]{SEQ2 +} \left(7;8;3,\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[ASSIGN]{SEQ1 +} \left(8;3,\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$\xrightarrow{SEQ1 + ASSIGN} \left(3,\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{WHILE\_TRUE} \left(4;3,\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$\xrightarrow{SEQ2 + IF\_TRUE} \left(5;3,\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\right) \xrightarrow[ASSIGN]{SEQ1} \left(3,\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{WHILE\_FALSE} \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

A2.1

c)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(1,\binom{0}{0}) \Downarrow \binom{4}{0}}\,\text{BASSIGN} \qquad \dfrac{}{(2,\binom{4}{0}) \Downarrow \binom{4}{1}}\,\text{BASSIGN}}{(1;2,\binom{0}{0}) \Downarrow \binom{4}{1}}\,\text{BSEQ} \qquad \dfrac{(i)}{(3,\binom{4}{1}) \Downarrow \binom{1}{3}}}{((1;2);3,\binom{0}{0}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BSEQ}$$

ad i)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(5,\binom{4}{1}) \Downarrow \binom{3}{1}}\,\text{BASSIGN}}{(4,\binom{4}{1}) \Downarrow \binom{3}{1}}\,\text{BIF\_TRUE} \qquad \dfrac{(ii)}{(3,\binom{3}{1}) \Downarrow \binom{1}{3}}}{(3,\binom{4}{1}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BWHILE\_TRUE}$$

ad ii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(7,\binom{3}{1}) \Downarrow \binom{3}{3}}\,\text{BASSIGN} \qquad \dfrac{}{(8,\binom{3}{3}) \Downarrow \binom{4}{3}}\,\text{BASSIGN}}{(7;8,\binom{3}{1}) \Downarrow \binom{4}{3}}\,\text{BSEQ}}{(4,\binom{3}{1}) \Downarrow \binom{4}{3}}\,\text{BIF\_FALSE} \qquad \dfrac{(iii)}{(3,\binom{4}{3}) \Downarrow \binom{1}{3}}}{(3,\binom{3}{1}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BWHILE\_TRUE}$$

ad iii)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{(5,\binom{4}{3}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BASSIGN}}{(4,\binom{4}{3}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BIF\_TRUE} \qquad \dfrac{}{(3,\binom{1}{3}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BWHILE\_FALSE}}{(3,\binom{4}{3}) \Downarrow \binom{1}{3}}\,\text{BWHILE\_TRUE}$$

A2.2

a)

$$\frac{(c_1,\sigma) \to (c_1',\sigma')}{(c_1 \| c_2,\sigma) \to (c_1' \| c_2,\sigma')}\ (PAR1) \qquad \frac{(c_1,\sigma) \to \sigma'}{(c_1 \| c_2,\sigma) \to (c_2,\sigma')}\ (PAR2)$$

$$\frac{(c_2,\sigma) \to (c_2',\sigma')}{(c_1 \| c_2,\sigma) \to (c_1 \| c_2',\sigma')}\ (PAR3) \qquad \frac{(c_2,\sigma) \to \sigma'}{(c_1 \| c_2,\sigma) \to (c_1,\sigma')}\ (PAR4)$$

(SKIP), (ASSIGN), (SEQ1), (SEQ2), (IF_TRUE), (IF_FALSE), (WHILE_TRUE), (WHILE_FALSE), (ASSUME) wie in VL

b) Determinismus

c)
- Big-Step Semantik überführt Konfigurationen in einen Finalzustand. Bei einer parallelen Ausführung können sich allerdings mehrere Finalzustände ergeben.
- Des Weiteren können Zwischenzustände nicht dargestellt werden. Es kann kein Interleaving von c_1 und c_2 berechnet werden, da der Zwischenzustand vor einem Context-Switch nicht darstellbar ist.

$\boxed{A2.3}$

- zeige: (i) $\Rightarrow$ c enthält divergente Berechnung

  Gelte (i). Wir erhalten die Ableitung

$$(c, \sigma_{init}) \longrightarrow^* (assume(b); \ldots, \sigma) = s$$

  wobei σ_{init} der initiale Zustand ist und $\mathcal{S}[\![b]\!](\sigma) = 0$.

  Damit existiert kein s' mit $s \rightarrow s'$, nach Regel (ASSUME).

- zeige: (ii) $\Rightarrow$ c enthält divergente Berechnung

  Gelte (ii). Wir wissen: für jede Konfiguration gibt es höchstens 2 Nachfolger-Konfiguration (PAR $\rightarrow$ 2, sonst $\rightarrow$ 1).

  Wenn wir die $\rightarrow$-Ableitungen als Baum betrachten, so hat jeder Knoten im Baum endlichen Grad. Ferner ist der Baum der erreichbaren Konfigurationen zusammenhängend. Dann gibt Königs Lemma einen unendlichen Pfad. Das Programm divergiert.

- zeige: (iii) $\Rightarrow$ c enthält divergente Berechnung

  Gelte (iii). Dann ex. Ableitung folgender Form

$$\underbrace{(c, \sigma_{init}) \longrightarrow^*}_{\text{Prefix}} \underbrace{(c_1, \sigma_1) \longrightarrow^* (c_1, \sigma_1)}_{\text{Kreis}}$$

  Da wir den Kreis beliebig wiederholen können, terminiert c nicht.

- Zeige: c enthält divergente Berechnung $\Rightarrow$ (i) oder (ii) oder (iii)

Enthalte c eine divergente Berechnung. Diese hat die Form

$$\underset{\overset{\shortparallel}{s_0}}{(c, \sigma_{init})} \longrightarrow s_1 \longrightarrow s_2 \longrightarrow \dots \quad , \; s_i \in (W_{--} \times State) \cup State$$

<u>Fall 1,</u> es existiert "ein letztes" s_i, ~~also $s_i \in State$~~.

Nach Ann. ist $s_i \in (W_{--} \times State)$, da sonst nicht divergent.

Alle SOS-Regeln haben einen Nachfolger, außer (ASSUME).

D.h. s_i ist nicht weiter ableitbar, da es ein nicht-erfülltes assume(s) enthält, (i).

<u>Fall 2,</u> die Berechnung ist unendlich, $\forall i, s\, \exists s'.\ s_i \longrightarrow s'$.

<u>Fall 2.1,</u> ein s_i wiederholt sich, also $s_i \rightarrow^* s_j$ mit $s_i = s_j$.

Dann ist ein Kreis erreichbar, (iii).

<u>Fall 2.2,</u> $\forall i, j.\ i \neq j \Rightarrow s_i \neq s_j$.

Dann enthält die Ableitung unendlich viele verschiedene (erreichbare) Konfigurationen, (ii).

$\blacksquare$

$\boxed{A2.4}$

Definiere

$$\rightsquigarrow \subseteq (W_{--} \times State) \times \underbrace{(W_{--} \times State)}_{State}$$

mit finalen Zuständen der Form

$$(skip, \sigma) \in (W_{--} \times State)$$

wie folgt:

$$\frac{}{(X := a, \sigma) \rightsquigarrow (skip, \sigma[X \mapsto \mathcal{S}[\![a]\!](\sigma)])} \text{NASSIGN}$$

$$\frac{}{(skip; c_2, \sigma) \rightsquigarrow (c_2, \sigma)} \text{NSEQ1} \qquad \frac{(c_1, \sigma) \rightsquigarrow (c_1', \sigma')}{(c_1; c_2, \sigma) \rightsquigarrow (c_1'; c_2, \sigma')} \text{NSEQ2}$$

$$\frac{}{(\underline{if}\ b\ \underline{then}\ c_1\ \underline{else}\ c_2\ \underline{fi}, \sigma) \rightsquigarrow (c_1, \sigma)} \text{NIF\_TRUE} \quad \text{falls } \mathcal{S}[\![b]\!](\sigma) = 1$$

$$\frac{}{(\underline{if}\ b\ \underline{then}\ c_1\ \underline{else}\ c_2\ \underline{fi}, \sigma) \rightsquigarrow (c_2, \sigma)} \text{NIF\_FALSE} \quad \text{falls } \mathcal{S}[\![b]\!](\sigma) = 0$$

$$\frac{}{(\underline{while}\ b\ \underline{do}\ c\ \underline{od}, \sigma) \rightsquigarrow (\underline{if}(b)\ \underline{then}\ c; \underline{while}\ b\ \underline{do}\ c\ \underline{od}\ \underline{else}\ skip\ \underline{fi}, \sigma)} \text{NWHILE}$$

$$\frac{}{(assume(b), \sigma) \rightsquigarrow (skip, \sigma)} \text{NASSUME} \quad \text{falls } \mathcal{S}[\![b]\!](\sigma) = 1$$